DEFAUT Samuel et VELLIN-PATCHE Lucas
PM101A12

DM BMS 2020

1|2|3|4 |5
4|0|4|0.5|2.5

11/20

Exercice 1

1)

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2)

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow P)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	F	F
V	V	V
F	V	F
F	F	V

$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $P \Leftrightarrow Q$

Ont la même table de vérité, ainsi, il sont équivalents.

Exercice 2 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

1) Soit $\varepsilon > 0$ un intervalle.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$, $\forall n$ si $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$

2) $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

3)

Exercice 3

1) On note (P_n) la proposition suivante : « $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ », $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation :

Pour $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

Ainsi (P_1) est vraie.

Hérédité : On cherche à démontrer que si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie aussi, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ d'après l'hypothèse de récurrence

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

mise sous facteur commun

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ainsi (P_n) est héréditaire.

<u>Conclusion</u> :

(P_1) est vraie
(P_n) est héréditaire
$\}$ (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) On note (P_n) la proposition suivante : " $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ ", $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \underline{\underline{1}} \qquad \left(\sum_{1}^{1} k\right)^2 = (1)^2 = \underline{\underline{1}}$$

Ainsi (P_1) est vraie.

<u>Hérédité</u> : On cherche à démontrer que si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie aussi, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

d'après hypothèse de récurrence

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^3\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Ainsi (P_n) est héréditaire. $\Big)$ $\Longrightarrow$ (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$
(P_0) est vraie

Exercice 4 :

$x-1+|x-2| \geq |2x+4|$ $\not\Leftrightarrow$ $|x-2| = |2x+4|-x+1$

(I) ????? $\not\Leftrightarrow$ $x-2 = \pm\,(|2x+4|-x+1)$

On a donc soit :

$\underset{(1)}{x-2 = |2x+4|-x+1}$ ou $\underset{(2)}{x-2 = -(|2x+4|-x+1)}$

Résolvons (1) :

$\Leftrightarrow |2x+4| = 2x-3 \Leftrightarrow 2x+4 = \pm(2x-3)$

On a soit $\underset{(a)}{2x+4 = 2x-3}$ soit $\underset{(b)}{2x+4 = -2x+3}$

(a) : $\Leftrightarrow \cancel{4=-3}$: pas de solutions

b) : $\Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

Résolvons (2) :

$\Leftrightarrow -x+2 = |2x+4|-x+1$

$\Leftrightarrow |2x+4| = 1 \Leftrightarrow 2x+4 = \pm(1)$

On a soit $\underset{(c)}{2x+4 = 1}$ soit $\underset{(d)}{2x+4 = -1}$

(c) : $\Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$

(d) : $\Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$

On a donc $x = -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$

$x < -\frac{5}{2}$ $\qquad -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$ $\qquad -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{4}$ $\qquad x > -\frac{1}{4}$

Si $x < \frac{-5}{2}$, (I) est <u>fausse</u>.

Si $\frac{-5}{2} < x < \frac{-3}{2}$, (I) est <u>vraie</u>.

Si $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{4}$, (I) est <u>fausse</u>.

Si $x > -\frac{1}{4}$, (I) est <u>fausse</u>.

On a donc $\frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{-3}{2}$

Ainsi l'ensemble des solutions de (I) est $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

The answer is correct, but the solution is wrong.

0.5/4

Exercice 5 :

1. $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases}$ $\begin{matrix} \\ L_2 \to L_2-4L_1 \\ L_3 \to L_3+3L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -10y+14z=42 \\ 7y-10z=-30 \end{cases}$

$\begin{matrix} L_2 \to 7L_2 \\ L_3 \to 10L_3 \end{matrix}$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -70y+98z=294 \\ 70y-100z=-300 \end{cases}$ $L_3 \to L_3+L_2$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -70y+98z=294 \\ -2z=-6 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -70y+98z=294 \\ z=3 \end{cases} \to \begin{cases} x+2y-9=-7 \\ -70y+294=294 \\ z=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-9=-7 \\ -70y=0 \\ z=3 \end{cases}$

$x+2\times0-9=-7$

$x=2$

Donc, $S=\{x=2\,;\,y=0\,;\,z=3\}$

$\{(2,0,3)\}$

1. $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -5x+z=-5 \end{cases}$ $L_2 \to L_2+L_3$

$\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -x-2y+3z=9 \\ -5x+z=-5 \end{cases}$ $L_2 \to L_2+L_1$

$\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 0=2 \\ -5x+z=-5 \end{cases}$ $0 \neq 2$ Donc $S=\cancel{\{\emptyset\}}$ $\emptyset$

2.5/4