1|2|3|4|5
4|2|2|3|4

15/20

MERLE
Jean-Charles
PM101A12
FITGER
Nathan

BMS

Devoir Maison

Exercice 1 :

1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V

3)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

On remarque que les propositions $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ ont la même table de vérité. On en déduit donc que ces deux propositions sont équivalentes.

Exercice 2 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f admet un minimum si cette proposition est vraie :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

1) f admet un maximum :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$$

2) f n'admet pas de minimum :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \underline{\geq} f(y) >$$

3) On cherche à prouver que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ est toujours vraie. Il existe deux cas de figure : soit la fonction f admet un minimum $f(x)$, soit elle n'en admet pas.

Or on sait que la proposition $\neg P$: $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(y) \leq f(x)$ est vraie lorsque f admet un minimum (énoncé)
De même, pour la proposition P : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ qui est vraie lorsque f n'admet pas de minimum (question 2).

Donc si P est vraie et $\neg P$ est également vraie, on en déduit également que la proposition $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ qui équivaut à $(P \wedge \neg P)$ est toujours vraie. ?????

2/4

Exercice 3 : 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : pour $n = 1$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie.
Au rang $n+1$, on a:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n+1} k + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2+n)}{2}$$

Conclusion: on a montré que $P(1)$ est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$??? La propriété est donc héréditaire

et elle est vraie pour $\forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

2) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Initialisation: pour $n=1$, on a:
$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\left(\sum_{k=1}^{1} 1\right)^2 = 1$

donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie.

Au rang $n+1$, on a:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2(n^2+2n+1) + 4(n^3+3n^2+3n+1)}{4}$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3+12n^2+12n+4}{4}$$

$$= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4}{4}$$

$$= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

On trouve bien $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$

Conclusion : on a montré que $P(1)$ est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$. La propriété est héréditaire et par récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4|$

$|2x+4| - |x-2| - x + 1 \leqslant 0$

	$-\infty$ -2	2	$+\infty$
$\|2x+4\|$	$-2x-4$ 0	$2x+4$	$2x+4$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$

Pour $x \in \left]-\infty ; -2\right]$:

$-2x - 4 + x - 2 - x + 1 \leqslant 0$

$-2x - 5 \leqslant 0$

$2x \geqslant -5$

$\boxed{x \geqslant -\frac{5}{2}}$

Pour $x \in [-2 ; 2]$:

$2x + 4 + x - 2 - x + 1 \leqslant 0$

$2x + 3 \leqslant 0$

$\boxed{x \leqslant -\frac{3}{2}}$

Pour $x \in \left[2 ; +\infty\right[$:

$2x + 4 - x + 2 - x + 1 \leqslant 0$

$7 \leqslant 0$

impossible

On a donc $S = \left[-\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}\right]$ **explain!**

3/4

Exercice 5: 1) $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases}$

$2L_3 \to L_3$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -6x+2y-2z=-18 \end{cases}$

$\begin{matrix} \\ L_1+L_2 \to L_2 \\ L_3+L_2 \to L_3 \end{matrix}$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 5x-z=7 \\ -2x=-4 \end{cases}$ $\begin{matrix} \\ \Rightarrow 5\times 2 - z = 7 \iff \boxed{z=3} \\ \Rightarrow \boxed{x=2} \end{matrix}$

L_1 : $2y = -7 - x + 3z$
$\iff 2y = -7 - 2 + 3\times 3$
$\iff \boxed{y=0}$

Donc l'ensemble des solutions est $(x,y,z)=(2,0,3)$

2) $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -5x+z=-5 \end{cases}$

$L_1+L_2 \to L_1$ $\begin{cases} 5x-z=7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ z=-5+5x \end{cases}$

4/4

L_1 : $5x-(-5+5x)=7$
$\iff \cancel{5x}+5-\cancel{5x}=7$
$\iff 5=7$

Impossible donc aucune solution : $S=\emptyset$