

1|2|3|4|5
4|3|3|4|4

18/20

GONZALEZ

Haïza

PM 101 A11

École Trifilette

29 / 10 / 2020

Devoir maison:

Exercice 1:

Soient P et Q deux propositions logiques:

1.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

2.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

3.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

On remarque que les propositions $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $P \Leftrightarrow Q$ ont la même

table de vérité.

On peut donc en déduire qu'elles sont équivalentes.

4/4

Exercice 2:

1. f admet un maximum si:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$$

2. f n'admet pas de minimum si:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

Pour prouver que cette proposition est toujours vraie, nous allons prouver que sa négation est fausse.

$$\neg (\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)) = \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

Prenons $y = 2$ et $x = 3$; dans une fonction croissante:

$$\text{On sait que } x > y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Prenons maintenant $y = 2$ et $x = 1$:

$$\text{On sait que } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

On peut donc conclure que la proposition $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ est fausse et donc que sa négation $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ est vraie.

De plus, l'inégalité n'étant pas stricte, en prenant $x = y$, la proposition est vraie. En effet, $x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Alors, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ tel que $x = y$ par exemple.

3/4

Exercice 3:

$$1. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation:

On vérifie que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ est vrai pour $n=1$.

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Donc, la proposition $P(1)$ est vraie.

Hérédité:

?????

Supposons que (P_n) est vraie pour tout entier naturel n différent de 0.
Montrons maintenant que la propriété est vraie au rang $(n+1)$. On veut:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\text{On sait que } \sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n+1$$

et

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\text{Alors, } \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n+1.$$

de récurrence
D'après l'hypothèse $\forall n$ on a : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}\text{Alors, } \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$(P_n): \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Initialisation:

On vérifie que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$ est vraie pour $n=1$.

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1^2 = 1$$

Donc la proposition $P(1)$ est vraie.

Hérédité:

?????

Supposons que (P_n) est vraie pour tout entier naturel n différent de 0. Montrons maintenant que la propriété est vraie au rang $(n+1)$. On veut:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$

On sait que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$\hookrightarrow \text{Donc,} \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Alors, $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3$

D'après la question 1, on sait que :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n(n+1))^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n^2 + 4(n+1))(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+2)^2 (n+1)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

D'après la question 1, on sait que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Exercice 4:

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+4|$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x \leq 2 \end{cases}$$

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & x \geq -2 \\ -2x-4, & x \leq -2 \end{cases}$$

• $x \in]-\infty; -2]$

$$x-1-x+2 \geq -2x-4$$

$$1 \geq -2x-4$$

$$5 \geq -2x$$

$$\underline{\underline{-\frac{5}{2} \leq x}}$$

Sur $]-\infty; -2]$ l'ensemble des solutions est $[-\frac{5}{2}; -2]$

• $x \in [-2; 2]$

$$x-1-x+2 \geq 2x+4$$

$$1 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 2x$$

$$\underline{\underline{-\frac{3}{2} \geq x}}$$

Sur $[-2; 2]$ l'ensemble des solutions est $[-2; -\frac{3}{2}]$

$$\bullet x \in [2; +\infty[$$

$$x - 1 + x - 2 \geq 2x + 4$$

$$2x - 3 \geq 2x + 4$$

$$0 \geq 7$$

$\Rightarrow$ impossible : $[2; +\infty[$ n'admet aucune solution.

L'ensemble des solutions total est $[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$

4/4

Exercice 5:

$$1. \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \xleftrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1}} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \rightarrow 10L_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 70y - 100z = -300 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 7L_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

$$\bullet -2z = -6 \Rightarrow \underline{z = 3}$$

$$\bullet -10y + 14z = 42 \Rightarrow -10y + 14 \times 3 = 42 \\ \Rightarrow \underline{y = 0}$$

GONZALEZ

Haïra

PTI 101 A11

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= -7 \Rightarrow x + 2 \times 0 - 3 \times 3 = -7 \\&\Rightarrow x - 9 = -7 \\&\Rightarrow \underline{x = 2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{(2; 0; 3)\}$

$$\begin{aligned}2. \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x \quad \quad + z = -5 \end{cases} &\xleftrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + 5L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

IMPOSSIBLE

L'ensemble des solutions est $\emptyset$.