1|2|3|4|5
4|4|2|4|3

17/20

KELLER William PM 101 A11 10/11/2020

Yoan m'a aidé pour la question 3 de l'exo 2

DM de maths :

→ Exercice 1 :

1)

P	Q	P ∨ Q	P ∧ Q	(P ∨ Q) ⟹ (P ∧ Q)
T	F	T	F	F
T	T	T	T	T
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

2)

P	Q	P ⟹ Q	Q ⟹ P	(P ⟹ Q) ∧ (Q ⟹ P)
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F

3) Les deux tables de vérités sont équivalentes et nous savons que la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est équivalente à la proposition $P \Leftrightarrow Q$. On en déduit donc que la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est aussi équivalente à la proposition $P \Leftrightarrow Q$. Lorsque l'on dit "équivalentes" on entend qu'elles ont la même table de vérité.

4/4

→ Exercice 2: f admet un minimum:

$$\exists_x \in \mathbb{R}, \forall_y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

1) f admet un maximum : $\exists_x \in \mathbb{R}, \forall_y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2) f n'admet pas de minimum: $\forall_x \in \mathbb{R}, \exists_y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

3) D'après la consigne on a, f une fonction de $\mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ ainsi que une unique image par f.
donc si $x = y$, $f(x) = f(y)$, on en déduit:

$$\forall_y \in \mathbb{R}, \exists_x \in \mathbb{R}, f(x) = f(y).$$

Par inégalité large on a pour toute fonction f:

$$\forall_y \in \mathbb{R}, \exists_x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

4/4

→ Exercice 3:

1) Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation: Pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad P(1) \text{ vraie.}$$

Hérédité: Supposons $P(n)$ vraie, a-t-on $P(n+1)$ vraie?

On veut montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$P(n+1)$ vraie la propriété est héréditaire

<u>Conclusion :</u> $P(1)$ vraie et la propriété P est héréditaire on a donc $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 \text{ et } \left(\sum_{k+1}^{1} k\right)^2 = 1 \qquad P(1) \text{ vraie}$$

<u>Hérédité :</u> Supposons $P(n)$ vraie, a-t-on $P(n+1)$ vraie ?

On veut montrer $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (k)^3 (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 (n^3 + 3n^2 \times 1 + 3n \times 1^2 + 1^3)$$

???????

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$$

There I thought that factorizing would be easier →

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = \left(\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}\right)(n+1)^3$$

$$= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)$$

$$= \left(\frac{n^2 + 4(n+1)}{4}\right)(n+1)^2$$

$$= \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right)(n+1)^2 = \frac{(n+2)^2}{4}(n+1)^2$$

On sait que : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc : $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \frac{(n+2)^2}{4}(n+1)$

On note qu'après factorisation $\sum_{k=1}^{n+1} k^3$ est bien égal à $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$
$P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie, P est héréditaire

Conclusion : $P(1)$ vraie et la propriété P est héréditaire
on a donc $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2/4

→ Exercice 4 : $x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4|$

- Si $x < -2$: $|x-2| = -x+2$
$|2x+4| = -2x-4$

$x - 1 + (-x+2) \geqslant (-2x-4)$
$1 \geqslant -2x-4$
$5 \geqslant -2x$
$-\frac{5}{2} \leqslant x$

L'ensemble de solutions est :
$S = [-\frac{5}{2} ; -2[$

- Si $-2 \leqslant x < 2$: $|x-2| = -x+2$
$|2x+4| = 2x+4$

$x - 1 + (-x+2) \geqslant 2x+4$
$1 \geqslant 2x+4$
$-3 \geqslant 2x$
$-\frac{3}{2} \geqslant x$

L'ensemble de solutions est alors :
$S = [-2 ; -\frac{3}{2}]$

[redacted] PM 101 A11 10/11/2020
William

Suite du DM de Maths

Si $x \geq 2$, $|x-2| = x-2$
$|2x+4| = 2x+4$

$x-1+x-2 \geq 2x+4$
$2x-3 \geq 2x+4 \iff -3 \geq 4$
impossible

L'équation n'est jamais vérifiée donc $S = \emptyset$

L'ensemble général des solutions est alors :

$$S = [-\frac{5}{2}; -2[\cup [-2; -\frac{3}{2}] \iff S = [-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$$

4/4

→ Exercice 5 :

1) $\begin{cases} x+2y-3z=7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \iff L_2} \begin{cases} 4x-2y+2z=14 \\ x+2y-3z=7 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases}$

$L_2 = L_1 + L_2$
$L_3 = 2L_3 + L_1$

$\begin{cases} 4x-2y+2z=14 \\ 5x \quad -z=21 \\ -2x \quad =-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(2)-2y+2z=14 \\ 5(2) \quad -z=21 \\ x=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 8-2y+2(-11)=14 \\ z=-11 \\ x=2 \end{cases}$

$-2y = 28$
$y = -14$

????

L'ensemble de solutions est alors
$S = \{(2; -14; -11)\}$

2) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \overset{L_2 = L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 5x - z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$

$\overset{L_2 = -L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -5x + z = -14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$

$-14 \neq -5 \rightarrow$ impossible

Le système est non-vérifié car impossible !

$S = \emptyset$

3/4