DEVOIR MAISON BMS

EXO 1

1. Table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	F	F	F	V

2. Table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V

3. On a : $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv P \Leftrightarrow Q$ Or, $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

ont la même table de vérité.

Alors $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q) \equiv P \Leftrightarrow Q$ 4/4

EXO 2

1. "f admet un maximum" : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$ 2. "f n'admet pas de minimum" : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ 3. P : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

Par l'absurde on va montrer que P est vraie.

supposons que $\neg P$ est vraie : $\neg P$: $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

Contre-exemple :

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour x , et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ $y \mapsto y$ et $x = y$ alors $f(x) = f(y) \neq f(x) > f(y)$ donc $\neg P$ est fausse et alors P est vraie. 4/4

EXO 3

1. Initialisation : $\sum_{k=1}^1 k = \frac{1 \times 2}{2} = 1$, $P(1)$ vraieHérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraieDonc $P(n)$ vraie pour tout $n > 0$ 2. Initialisation $\sum_{k=1}^1 k^3 = \left(\sum_{k=1}^1 k\right)^2 = 1^3 = 1^2 = 1$ Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{D'où, } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraieDonc $P(n)$ vraie pour tout $n > 0$ 4/4

EXO 4

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+4|$$

$$\bullet |2x+4| \begin{cases} -2x-4 & x \leq -2 \\ 2x+4 & x \geq -2 \end{cases}$$

$$\bullet |x-2| \begin{cases} -x+2 & x \leq 2 \\ x-2 & x \geq 2 \end{cases}$$

 $\rightarrow$ sur $]-\infty; -2]$

$$x-1 - x+2 \geq -2x-4$$

$$2x \geq -5$$

$$x \geq \frac{-5}{2}$$

L'intervalle de solutions est alors $[-\frac{5}{2}; -2]$ $\rightarrow$ sur $[-2; 2]$

$$x-1 - x+2 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 2x$$

$$\frac{-3}{2} \geq x$$

L'intervalle de solutions est alors $[-2; \frac{-3}{2}]$ $\rightarrow$ sur $[2; +\infty[$

$$x-1 + x-2 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 4, \text{ impossible}$$

La solution est alors $\emptyset$ $\Rightarrow$ L'intervalle total de solutions est :

$$[-\frac{5}{2}; -2] \cup [-2; \frac{-3}{2}]; [-\frac{5}{2}; \frac{-3}{2}]$$

4/4

EXOS

$$1. \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 5x-z = 7 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} \quad L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3$$

$$\begin{cases} 7x-z = 11 \\ 5x-z = 7 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} \quad L_1 \rightarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ 5x-z = 7 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 10-z = 7 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \\ -6+y-3 = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

La solution du système est : $S = \{(2; 0; 3)\}$

$$2. \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -5x+z = -5 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 5x+z = 7 \\ -5x+z = -5 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 + L_3$$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 0 = 2 \\ -5x+z = -5 \end{cases} \quad 3.5/4$$

Le système est impossible. La solution est $\emptyset$