$\underline{1|2|3|4|5}$
$4|4|4|0|3.5$

15.5/4

LOPES MARQUES Telma
PM101 A11

Devoir Maison

Exercice 1

(1) $P \vee Q \Rightarrow P \wedge Q$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q \Rightarrow P \wedge Q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

(2) $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(3) $P \Leftrightarrow Q$ revient à dire $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ dont la table de vérité est dressée dans la question 2. Or elle est exactement la même que la table de vérité de $P \vee Q \Rightarrow P \wedge Q$ donc ces deux propositions sont bien équivalentes. 4/4

Exercice 2

(1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$

(3) L'égalité n'étant pas stricte, il suffit de prendre x=y pour que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ soit vraie peu importe la fonction f choisie. 4/4

Exercice 3

(1) P(n) : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : n=1 $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc P(1) vérifiée et P(n) initialisée

Hérédité : Supposons P(n) vraie.

P(n+1) : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ or P(n) : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ vraie donc P(n+1) vraie

<u>Conclusion :</u> P(1) vraie et $\forall n \in \mathbb{N} > 0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ donc P(n) vraie $\forall n \in \mathbb{N} > 0$.

(2) P(n) : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$

<u>Initialisation :</u> n=1 $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ $(\sum_{k=1}^{1} k)^2 = 1$ donc P(1) vérifiée et P(n) initialisée

<u>Hérédité :</u> Supposons P(n) vraie

P(n+1) : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (\sum_{k=1}^{n+1} k)^2$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 =$ $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 + (n+1)^3$ car $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ d'après l'hypothèse de récurrence	$(\sum_{k=1}^{n+1} k)^2 = (\sum_{k=1}^{n} k + (n+1))^2 =$ $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 + 2(n+1)(\sum_{k=1}^{n} k) + (n+1)^2 =$ $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 + 2(n+1)(\frac{n(n+1)}{2}) + (n+1)^2 =$ $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 + (n+1)^2(n+1) =$ $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 + (n+1)^3$

Donc P(n+1) vraie

4/4

<u>Conclusion :</u> P(1) vraie et $\forall n \in \mathbb{N} > 0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ donc P(n) vraie $\forall n \in \mathbb{N} > 0$.

<u>Exercice 4</u>

$$x - 1 + |x-2| \geq |2x+4|$$

$$|x-2| = \begin{cases} -x+2, x \leq 2 \\ x-2, x \geq 2 \end{cases} \qquad |2x+4| = \begin{cases} -2x-4, x \leq -2 \\ 2x+4, x \geq -2 \end{cases}$$

X ∈] -∞ ; -2]	X ∈ [-2 ; 2]	X ∈ [2 ; +∞ [
$-x+2 = -2x-4$	$2x+4 = -x+2$	$x-2 = 2x+4$
$6 = -x$	$3x = -2$	$-x = 6$
$x = 6$	$x = -2/3$	$x = -6$
$S_1 = \{-6\}$	$S_2 = \{-2/3\}$	$S_3 = \emptyset$ car -6 ∉ [2 ; +∞ [

$$S = \{-6 ; -2/3\}$$

0

Exercice 5

(1) $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -10y+14z=42 \\ 7y-10z=-30 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -2z=-6 \\ 7y-10z=-30 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 7y-10z=-30 \\ -2z=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases}$

$$S=\{(2,0,3)\}$$

(2) $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z \\ -5x+z=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ -10y+14z=42 \\ 10y-14z=-40 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} -10y+14z=10y-14z \\ 42=-40 \end{matrix}$

$$S=\emptyset$$

3.5/4