

Exercice 1

1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3) La proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est équivalente à $P \Leftrightarrow Q$. Or, $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ a le même tableau de vérité que $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$, donc cette dernière proposition est aussi équivalente à $P \Leftrightarrow Q$. 4/4

Exercice 2

1) Je l'associerais à: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2) Elle serait: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(y) \leq f(x)$

3) Appelons P la proposition de l'énoncé. Si P est vraie alors $\neg P$ est fausse, donc il suffit de démontrer que $\neg P$ est fausse pour démontrer que P est vraie.

$\neg P = \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$, quelle que soit f for a certain f

Or, $f(a) = 2$ ne vérifie pas cette proposition car $f(x) = f(y) = 2$, donc $\neg P$ est fausse, d'où P est vraie. 2/4

Exercice 4

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+4|$$

• Si $x < -2$: $x-2 < 0$ donc $2x+4 < 0$

$$|x-2| = -(x-2)$$

$$|2x+4| = -(2x+4)$$

On doit résoudre: $x-1 - (x-2) \geq -2x-4$

$$1 \geq -2x-4$$

$$2x \geq -5$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

Donc sur cet intervalle $S_1 = [-\frac{5}{2}; -2[$

• Si $-2 \leq x < 2$: $x-2 < 0$ donc : $|x-2| = -(x-2)$
 $2x+4 > 0$ $|2x+4| = 2x+4$

On doit résoudre : $x-1 - x+2 > 2x+4$
 $1 > 2x+4$
 $-3 > 2x$
 $-\frac{3}{2} > x$

Donc sur cet intervalle $S_2 = [-2; -\frac{3}{2}]$

• Si $x \geq 2$: $x-2 \geq 0$ donc : $|x-2| = x-2$
 $2x+4 > 0$ $|2x+4| = 2x+4$

On doit résoudre : $x-1+x-2 > 2x+4$
 $2x-3 > 2x+4$
 $0 > 7$

On obtient une inéquation qui est toujours faussée donc $S_3 = \emptyset$

Les solutions sont donc $S = [-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$ 4/4

Exercice 5

1)
$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} \xrightarrow{L_1=4L_1} \begin{cases} 4x+8y-12z = -28 \\ -10y+14z = 42 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases} \xrightarrow{L_1=\frac{3}{4}L_1} \begin{cases} 3x+6y-9z = -21 \\ -10y+14z = 42 \\ 7y-10z = -30 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2=7L_2 \\ \rightarrow \\ L_3=10L_3 \end{matrix} \begin{cases} 3x+6y-9z = -21 \\ -70y+98z = 294 \\ 70y-100z = -300 \end{cases} \xrightarrow{L_3=L_2+L_3} \begin{cases} 3x+6y-9z = -21 \\ -70y+98z = 294 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} L_3: & -2z = -6 & L_2: -70y + 98 \times 3 = 294 \\ & z = 3 & -70y = 0 \\ & & y = 0 \\ & & L_1: 3x - 27 = -21 \\ & & 3x = 6 \\ & & x = 2 \end{array}$$

$$S = \{(2; 0; 3)\}$$

$$2) \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -5x+z=-5 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} -5x+z=-5 \\ 4x-2y+2z=14 \\ x+2y-3z=-7 \end{cases} \xrightarrow{L_1=L_1+L_3} \begin{cases} -4x+2y-2z=-12 \\ 4x-2y+2z=14 \\ x+2y-3z=-7 \end{cases} \xrightarrow{L_2=L_2+L_1} \begin{cases} -4x+2y-2z=-12 \\ 0=2 \\ x+2y-3z=-7 \end{cases}$$

En L_2 on obtient une équation qui est toujours fausse donc $S = \emptyset$

4/4

Exercice 3

1) * $n=1$: $\sum_{k=1}^{n=1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc la propriété est vérifiée pour $n=1$

* Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrons alors que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(2n+2)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

* La propriété est donc vérifiée. On peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

2) * $n=1$: $\sum_{k=1}^{n=1} k^3 = 1$ et $\left(\sum_{k=1}^{n=1} k\right)^2 = 1$ donc la propriété est vérifiée pour $n=1$

* Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrons alors que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

* La propriété est donc vérifiée, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$

3/4