1|2|3|4|5
4|4|4|4|4

Exercice 1.

1. La table de vérité de cette proposition est :

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

20/20

2. La table de vérité de cette proposition est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3. D'après les tables de vérité des deux propositions étudiées, elles sont équivalentes (même valeur de vérité). Or on sait que la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ et la proposition $P \iff Q$ sont équivalentes.
Par transitivité, on en déduit donc que la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et la proposition $P \iff Q$ sont équivalentes.

Exercice 2.

1. "f admet un maximum" se traduit par :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \leqslant f(x)$$

2. "f n'admet pas de minimum" se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) > f(y)$$

3. f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $x, y \in \mathbb{R}$. Tout élément de $\mathbb{R}$ a une **unique** image par f, donc si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$. On peut donc écrire :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$$

Par inégalité **large**, on a donc pour toute fonction f la proposition suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(y)$$

■

4/4

Exercice 3.

1. Notons P cette propriété.

   - Au rang initial $n=1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. P est donc vraie au rang initial $n=1$.
   - Supposons que P soit vraie à un certain rang $n \geqslant 1$. Montrons que P_{n+1} est alors vraie, soit montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

   $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

   P_{n+1} est donc vraie. La propriété est alors héréditaire.

   - P est vraie au rang initial $n=1$ et est héréditaire, donc P est vraie pour tout entier naturel non nul.

$\blacksquare$

2. Notons Q cette propriété.

   - Au rang initial $n=1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1$. Q est donc vraie au rang initial $n=1$.
   - Supposons que Q soit vraie à un certain rang $n \geqslant 1$. Montrons que Q_{n+1} est alors vraie, soit montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$.

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\ &= \frac{n^2+4n+4}{4}(n+1)^2 \\ &= \frac{(n+2)^2}{4}(n+1)^2\end{aligned}$$

   Or $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \frac{(n+2)^2}{4}(n+1)^2$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$

   Q_{n+1} est donc vraie. La propriété est alors héréditaire.

   - Q est vraie au rang initial $n=1$ et est héréditaire, donc Q est vraie pour tout entier naturel non nul.

$\blacksquare$

4/4

Exercice 4.

On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert 2x+4\rvert$		$-2x-4$	0	$2x+4$		$2x+4$	

- Résolution dans $I_1 =]-\infty, -2]$:

$$x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4| \iff -2x-4 \leqslant 1 \iff x \geqslant -\frac{5}{2}$$

Donc $\mathscr{S}_1 = \left[-\frac{5}{2}; -2\right]$.

- Résolution dans $I_2 =]-2; 2]$:

$$x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4| \iff 2x+4 \leqslant 1 \iff x \leqslant -\frac{3}{2}$$

Donc $\mathscr{S}_2 = \left]-2; -\frac{3}{2}\right]$.

- Résolution dans $I_3 =]2; +\infty[$:

$$x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4| \iff 2x-3 \geqslant 2x+4 \iff -3 \geqslant 4$$

Or $-3 < 4$ donc l'inéquation n'est jamais vérifiée, soit $\mathscr{S}_3 = \varnothing$.

Ainsi, l'ensemble de solutions de cette inéquation dans $I = \mathbb{R}$ est : $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$

Exercice 5.

$$S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-6z=-14 & (L_1 \leftarrow 2L_1) \\ 2x-\ \ y+\ \ z=7 & (L_2 \leftarrow L_2/2) \\ -3x+\ \ y-\ \ z=-9 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+\ \ y-\ \ z=-9 & (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ 2x-\ \ y+\ \ z=7 & (L_2) \\ 2x+4y-6z=-14 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y-2z=-18 & (L_1 \leftarrow 2L_1) \\ -6x+3y-3z=-21 & (L_2 \leftarrow -3L_2) \\ 5y-7z=-21 & (L_3 \leftarrow L_3-L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y-2z=-18 & (L_1) \\ y-\ \ z=-3 & (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \\ 5y-7z=-21 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y-2z=-18 & (L_1) \\ 5y-5z=-15 & (L_2 \leftarrow 5L_2) \\ 5y-7z=-21 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y-2z=-18 & (L_1) \\ 5y-5z=-15 & (L_2) \\ -2z=-6 & (L_3 \leftarrow L_3-L_2) \end{cases}$$

On en déduit par substitution que $x=2,\ y=0$ et $z=3$. Ainsi, $\mathscr{S}_1=\{(2;0;3)\}$

$$S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+10y-15z=-35 & (L_1 \leftarrow 5L_1) \\ 2x-\ \ y+\ \ z=7 & (L_2 \leftarrow L_2/2) \\ -5x\quad +\ \ z=-5 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+10y-15z=-35 & (L_1) \\ 2x-\ \ y+\ \ z=7 & (L_2) \\ 10y-14z=-40 & (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 & (L_1 \leftarrow L_1/5) \\ 2x-\ \ y+\ \ z=7 & (L_2) \\ 5y-7z=-20 & (L_3 \leftarrow L_3/2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-6z=-14 & (L_1 \leftarrow 2L_1) \\ 2x-\ \ y+\ \ z=7 & (L_2) \\ 5y-7z=-20 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-6z=-14 & (L_1) \\ -5y+7z=21 & (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \\ 5y-7z=-20 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-6z=-14 & (L_1) \\ -5y+7z=21 & (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \\ 0=1 & (L_3 \leftarrow L_3+L_2) \end{cases}$$

L'équation en L_3 n'est jamais vérifiée donc le système n'est jamais vérifié, soit $\mathscr{S}_2=\varnothing$.

4/4