BEZARD
Lucas

PM101E21

Mathématiques
DM 1.

1	2	3	4	5
4	2.5	2	0	2

10.5/20

Exercice 1 :

(1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

(2)

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow P)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V

(3)

$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V
F	F
F	F
V	V

Même table de vérité donc
$((P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

4/4

Exercice 2 :

f minimum $= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(y)$

(1) $f_{max} = \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

(2) $f_{\text{pas de min}} = \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(y)$

(3)

2.5/4

BEZARD
Lucas
PM101E21

Mathématiques

DM 1.

Exercice 1 :

(1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

(2)

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow P)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V

(3)

$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V
F	F
F	F
V	V

Même table de vérité donc
$((P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

Exercice 2 :

$f_{minimum} = \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

(1) $f_{max} = \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

(2) $f_{\text{pas de min}} = \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

(3)

Exercice 3 :

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation

Pour $(n=1)$

$\sum_{k=1}^{1} 1 = 1$ $\qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1$

C'est vraie pour $n=1$ donc $p(1)$ vraie.

Hérédité

Supposons $P(n)$ vraie, verifions pour $p(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = k + n+1$$

$$\overset{p(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n^2+n}{2} + n+1$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc $p(n+1)$ est vraie.

la récurrence est établie. **2/4**

Exercice 4 :

$$x - 1 + |x - 2| \geq |2x + 4|$$

$$|x - 2| \begin{cases} x - 2 & \text{pour } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{pour } x \leq 2 \end{cases}$$

$$|2x + 4| \begin{cases} 2x + 4 & \text{pour } x \geq -2 \\ -2x - 4 & \text{pour } x \leq -2 \end{cases}$$

Sur $]-\infty ; -2]$

$$\cancel{x} - 1 \cancel{- x} + 2 \geq -2x - 4$$

$$1 \geq -2x - 4$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$\frac{5}{2} \in]-\infty ; -2]$ donc $-\frac{5}{2}$ est une solution.

Sur $[-2 ; 2]$

$$\cancel{x} - 1 \cancel{- x} + 2 \geq 2x + 4$$

$$1 \geq 2x + 4$$

$$x \leq -\frac{3}{2}$$

$-\frac{3}{2} \in [-2 ; 2]$ donc $-\frac{3}{2}$ est une solution.

Sur $[2 ; +\infty[$

$$\cancel{x} - 1 + \cancel{x} - 2 \geq \cancel{2x} + 4$$

$$-3 \geq 4 \rightarrow \text{Faux}$$

donc pas de solution sur $[2 ; +\infty[$

$$S = \left\{ -\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2} \right\}$$???

0

Exercice 5 :

(1) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_1]{L_2 \to L_2 - 4L_1} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 7y - 7z = -30 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{1}{2} L_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 2y = -9 \end{cases}$

$2y = -9$

$y = -\frac{9}{2}$

$-10\left(-\frac{9}{2}\right) + 14z = 42$

$45 + 14z = 42$

$z = -\frac{3}{14}$

$x + \cancel{2}\left(-\frac{9}{\cancel{2}}\right) - 3\left(-\frac{3}{14}\right) = -7$

$x - 9 + \frac{9}{14} = -7$

$x = 2 - \frac{9}{14}$

$x = \frac{19}{14}$

L'ensemble de solution est :

$\left\{\left(-\frac{9}{2} ; -\frac{3}{14} ; \frac{19}{14}\right)\right\}$

(2) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 5L_1]{L_2 \to L_2 - 4L_1} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ -14z = -40 \end{cases}$

$-14z = -40$

$z = \frac{-40}{-14}$

$z = \frac{20}{7}$

$-10y + 14\left(\frac{20}{7}\right) = 42$

$y = \frac{-2}{10}$

$x + 2\left(\frac{-2}{10}\right) - 3\left(\frac{20}{7}\right) = -7$

$x - \frac{4}{10} - \frac{60}{7} = -7$

$x = \frac{4}{10} + \frac{60}{7} - 7$

$x = \frac{28}{70} + \frac{600}{70} - \frac{490}{70}$

$x = \frac{138}{70} = \frac{69}{35}$

L'ensemble de solution est :

$\left\{\left(-\frac{2}{10} ; \frac{69}{35} ; \frac{20}{7}\right)\right\}$