

Devoir maison réalisé par :

Salima Belasri, Toanui Raoulx, Anissa De Parada et Lauryne Verwaerde

Devoir Maison LTPM103 U

Exercice 1:

(1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

(2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(3)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On remarque que les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ ont la même table de vérité, donc elles sont équivalentes.

Exercice 2:

(1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$ "f admet un maximum"

(2) "f n'admet pas de minimum" correspond à la négation de "f admet un minimum" soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y) >$$

(3) Pour montrer qu'une proposition est toujours vraie, il faut démontrer par l'absurde que sa négation est fausse :

$$\neg P \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$$

Cas ou $x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$\text{si } x > y \rightarrow f(x) \leq f(y)$$

???????

La négation de la proposition est fausse donc P est toujours vraie

2/4

Exercice 3:

Initialisation : (1) Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1$$

$$\text{et } \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

la propriété est donc vraie au rang 1.

Hérédité :

soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $p(n)$ vraie.

On cherche à démontrer que $p(n)$ est aussi vraie au rang $n+1$ soit :

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc $p(n)$ est aussi vrai au rang $n+1$ soit héréditaire.

(2) Pour $n=1$

initialisation: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = 1$ et $(1+2+\dots+n)^2 = 1$

Donc $p(n)$ vrai au rang $n=1$.

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $p(n)$ vrai.

On veut prouver que $p(n+1)$ est aussi vrai. Pour cela:

On remarque que $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^2(n+1)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \\ \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

4/4

Donc $p(n)$ est aussi vrai au rang $n+1$ soit héréditaire.

Exercice 6:

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+6|$$

$$|x-2| \begin{cases} -x+2, & x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases} \quad |2x+6| \begin{cases} -2x-6 > 0, & x < -2 \\ 2x+6 > 0, & x > -2 \end{cases}$$

$$x \in]-\infty; -2]$$

$$x-1-x+2 \geq -2x-6$$

$$1 \geq -2x-6$$

$$5 \geq -2x$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$x \in [-2; 2]$$

$$x-1-x+2 \geq 2x+6$$

$$1 \geq 2x+6$$

$$x \leq -\frac{5}{2}$$

$$x \in [2; +\infty[$$

$$x-1+x-2 \geq 2x+6$$

$$2x-3 \geq 2x+6$$

$$\emptyset$$

→ Solutions: $[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$ expliquer!!!!

Exercice 5:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 4x - 2y + 2z = 14 & L_2 \\ -3x + y - z = -9 & L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 2x - y + z = 7 \\ -x & = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$L_2 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow L_2 = L_2 + L_1 \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow 5x - z = 7 \Rightarrow \boxed{z = 3}$$

$$L_2 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 2x - y + z = 7 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow 2 \times 2 - y + 3 = 7 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 4x - 2y + 2z = 14 & L_2 \\ -5x + z = -5 & L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_3 \rightarrow L_3 + L_1 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ 0 + 0 + 0 = 2 \end{cases}$$

Comme $0 \neq 2$, le système n'a pas de solutions.