

Killian
HENRI
E22

Devain Maisen

16.5/20

1/2 | 3/4/5
4/0.5/4/4/4

exercice 1

(1)	P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
	V	V	V	V	V
	V	F	V	F	F
	F	V	V	F	F
	F	F	F	F	V

(2)	P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
	V	V	V	V	V
	V	F	F	V	F
	F	V	V	F	F
	F	F	V	V	V

- (3) On voit que $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ à la même table de vérité que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
 Or on sait que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
 c'est la même chose que $P \Leftrightarrow Q$
 Donc $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est équivalente
 à $P \Leftrightarrow Q$ 4/4

exercice 2

- (1) f admet un maximum si la proposition logique suivante est vraie : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

faux (2) f n'admet pas de minimum:
 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} f(x) \geq f(y)$

faux (3) Si l'on prends la négation
 de cette proposition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$$

On voit que cette proposition est fausse
 quelquesait f donc la proposition
 de départ : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$
 est toujours vraie

0.5/4

exercice 3

Initialisation

$$H(n): \sum_{k=1}^n k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \quad \text{L'égalité est}$$

vraie au rang 1

Si on suppose $H(n)$ vraie alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1)$$

Donc on applique $H(n)$

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{(n+1)}{2} n + (n+1)$$

$$\text{Donc } \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La proposition est vraie au rang $n+1$
 Donc $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ est vérifiée

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ d'après la}$$

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \quad \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \times 1}{4} = 1 \quad \text{réponse (1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2$$

exercice 4 4 4/4 l'hérédité est confirmée

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+4| \Leftrightarrow x + |x-2| - |2x+4| \geq 1$$

4 possibilités :

$$1/ x-2 \geq 0 ; 2x+4 \geq 0 : x + x - 2 - 2x - 4 \geq 1$$

$$2/ x-2 \leq 0 ; 2x+4 \geq 0 : x - x + 2 - 2x - 4 \geq 1$$

$$3/ x-2 \geq 0 ; 2x+4 \leq 0 : x + x - 2 + 2x + 4 \geq 1$$

$$4/ x-2 \leq 0 ; 2x+4 \leq 0 : -x + x + 2 + 2x + 4 \geq 1$$

Résolution des inéquations :

$$1/ x + -2x + 2x - 6 \geq 1$$

$$-6 \geq 1 \text{ impossible } x \in \emptyset$$

$$2/ -2x - 2 \geq 1$$

$$-2x \geq 3$$

$$x \leq -\frac{3}{2}$$

$$4/ 2x + 6 \geq 1$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$3/ 2x + 2x - 2 + 4 \geq 1$$

$$4x + 2 \geq 1$$

$$x \geq -\frac{1}{4}$$

intervalles :

1/ $x - 2 \geq 0$; $2x + 4 \geq 0$

Donc $x \geq 2$; $x \geq -2$

On a donc que $x \in \emptyset$

2/ $x \leq \frac{3}{2}$; $x - 2 < 0$; $2x + 4 \geq 0$

Donc $x < 2$; $x \geq -2$

3/ $x \geq -\frac{1}{2}$; $x - 2 \geq 0$; $2x + 4 < 0$

Donc $x \geq 2$; $x < -2$

Donc impossible $x \in \emptyset$

4/ $x \geq -\frac{5}{2}$; $x - 2 < 0$; $2x + 4 < 0$

$x < 2$; $x < -2$

Donc

1/ $x \in \emptyset$; ~~$x \in [-2, 2]$~~ ;

2/ $x \leq -\frac{3}{2}$; $x \in [-2, 2]$;

3/ $x \in \emptyset$

4/ $x \geq -\frac{5}{2}$; $x \in]-\infty, -2[$;

Donc les intervalles de réponse sont :

$x \in [-2, -\frac{3}{2}]$ et $x \in [-\frac{5}{2}, -2[$

Donc la solution de cette inéquation

est $x \in [-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}]$

4/4

exercice 5

$$\begin{cases} L_1 & x + 2y - 3z = -7 \\ L_2 & 4x - 2y + 2z = 14 \\ L_3 & -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$L_2' \leftarrow L_2 + L_1 : 4x + x - 3z + 2z = -7 + 14 \\ : 5x - z = 7$$

$$L_3' : 2L_3 - L_1 : -6x - x - z + 2z = -18 + 7 \\ : -7x - z = -11$$

$$L_3' : -7x + z = -11$$

$$\begin{cases} L_1 & x + 2y - 3z = -7 \\ L_2' & 5x - z = 7 \\ L_3' & -7x + z = -11 \end{cases}$$

$z = -11 + 7x$, on remplace :

$$5x - (-11 + 7x) = 7$$

$$5x + 11 - 7x = 7$$

$$-2x = 7 - 11$$

$$x = 2$$

Donc $-7 \times 2 + z = -11$

$$-14 + z = -11$$

$$z = 3$$

On remplace dans l'équation 1/

$$2 + 2y - 9 = -7$$

$$2y - 7 = -7$$

Donc $y = 0$

Les solutions

sont (x, y, z)

$$= (2, 0, 3)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \} x + 2y - 3z = -7 \\ L_2 \} 4x - 2y + 2z = 14 \\ L_3 \} -5x \quad \quad + z = -5 \end{array}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 : 4x + x + 2z - 3z = -7 + 14 \\ \therefore 5x - z = 7$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\text{Puis } L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$L_2' : 5x - 5x - z + z = 2 \\ 0 = 2$$

Impossible, le système
n'a pas de solution
dans $\mathbb{R}$ $x \in \mathbb{Q}$

4/4