

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2020/2021 CODE UE : 4TPM103 U (Bases mathématiques pour les sciences) Devoir Maison à rendre au plus tard le 6 Novembre 2020 selon votre groupe	Collège Sciences & Technologies
---	--	---

EXERCICE 1. Soient P et Q deux propositions logiques :

- (1) Établir la table de vérité de la proposition

$$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q).$$

- (2) Établir la table de vérité de la proposition

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

- (3) En déduire que la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est équivalente à $P \iff Q$.

1|2|3|4|5
4|4|4|4|4

20/20

EXERCICE 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que f admet un minimum si la proposition logique suivante est vraie :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y).$$

- (1) A quelle proposition logique associez-vous la définition de " f admet un maximum" ?
(2) Quelle serait la définition de " f n'admet pas de minimum" ?
(3) Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la proposition :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y).$$

Montrer que quelle que soit f , cette dernière proposition est toujours vraie.

EXERCICE 3.

- (1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- (2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

EXERCICE 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$x - 1 + |x - 2| \geq |2x + 4|.$$

EXERCICE 5. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$(1) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x \quad \quad + z = -5 \end{cases}$$

Léa
JARLET
E21

24/10/20

Devoir Maison BMS
Vacances de Toussaint

Exercice 1:

1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F

2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F

3)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F

As a conclusion, $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ is equivalent to $P \Leftrightarrow Q$ because they have the same truth table. 4/4

Exercise 2:

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(y).$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y).$

3) I take any function and I show it's true for this one, but f can be everything and anything. So it will be true for all functions.

If $x = y$, $f(x) = f(y)$. As it's written in the exercise:
 $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y).$

We can conclude that this proposal is always true 4/4
since $f(x) \leq f(y)$ if $f(x) = f(y)$.

Exercise 3:

1) Initialisation: We verify $P(1)$ is true.

$$P(1) = \frac{1 \times 2}{2} = 1. \quad \text{So } P(1) \text{ is true.}$$

Heredity: Let be an integer $n \geq 1$, we suppose $P(n)$ true and then we show $P(n+1)$ is true.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

So $P(n+1)$ is true.

Conclusion: $P(1)$ is true and $P(n)$ is hereditary from the first rank. By recurrence, $P(n)$ is true for all integers $n \geq 1$.

2) Initialisation: We verify $P(1)$ is true

$$P(1): \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 = 1 \text{ and } \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = (1)^2 = 1$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \quad P(1) \text{ is true.}$$

Heredity: Let be an integer $n \geq 1$, we suppose $P(n)$ true and we'll show $P(n+1)$ is true.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 &= n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n k + n + 1 \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \right)^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^n k + n + 1 \right)^2$$

$P(n+1)$ is true.

Conclusion: $P(1)$ is true and $P(n)$ is hereditary from the first rank.

By recurrence, $P(n)$ is true for all integers $n \geq 1$.

4/4

Exercise 4:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$ x-2 $	$-(x-2)$	$-(x-2) \circ$	$x-2$	
$ 2x+4 $	$-(2x+4)$	$\circ$	$2x+4$	$2x+4$
$ x-1 $	$-(x-1)$	$-(x-1) \circ$	$x-1$	
$ x-2 \geq 2x+4 $	$x-1 - (x-2) \geq -2x+4$	$(x-1) - (x-2) \geq 2x+4$	$(x-1) + (x-2) \geq 2x+4$	
$ 2x+4 $				

• If $x \leq -2$

$$(x-1) - (x-2) \geq -(2x+4)$$

$$\Leftrightarrow x-1-x+2 \geq -2x-4$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -5$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

The set of solutions on $] -\infty; -2]$ is $[-\frac{5}{2}; -2]$

• If $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$(x-1) - (x-2) \geq 2x+4$$

$$\Leftrightarrow x-1-x+2 \geq 2x+4$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$$

The set of solutions on $[-2; \frac{1}{2}]$ is $[-2; -\frac{3}{2}]$

• If $x \geq \frac{1}{2}$

$$(x-1) + (x-2) \geq 2x+4$$

$$\Leftrightarrow x-1+x-2 \geq 2x+4$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 \geq 2x+4$$

$$\Leftrightarrow -3 \geq 4$$

Impossible

The set of solutions on $[\frac{1}{2}; +\infty[$ is $\emptyset$.

THE GLOBAL SET OF SOLUTIONS IS

$$\boxed{\left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]}$$

Exercise 5 :

$$1) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x + 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & (3) \\ -10y + 14z = 42 & (2) \\ -2z = 6 & (1) \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow 10L_3 + 7L_2$

(1) $\boxed{z = 3}$

(2) $-10y = 42 - 42 = \boxed{0}$

(3) $x + 0 - 3 \times 3 = -7 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

The set of solutions is $\{(2, 0, 3)\}$.

$$2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$\boxed{0 = 2}$ impossible.

The set of solutions is $\emptyset$.