1	2	3	4	5
4	2.5	1	4	3.5

KERKOUB
Nabil

Devoir Raison

15/20

Exercice 1

1) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

3) La proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est équivalente à la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Or la seconde proposition n'est autre que la forme développé de $P \Leftrightarrow Q$, donc la première proposition est aussi équivalente à $P \Leftrightarrow Q$.

4/4

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exercice 2

1) "f admet un maximum" : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(y)$

2) "f n'admet pas de minimum" : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(y) \leqslant f(x)$ <

Quelque soit le x choisit dans $\mathbb{R}$, il existera un y dans $\mathbb{R}$ tel que $f(y) \leqslant f(x)$.

3) Si la fonction est croissante, l'image de $x = y-1$ sera inférieur ou égale à celle de y.

Si la fonction est décroissante, ~~l~~ l'image de $x = y+1$ sera inférieur ou égale à celle de y.

Si la fonction est monotone, l'image de tout x sera inferieur ou égale à celle de y.

Si le terme y est le minimum de la fonction alors $x = y$.

????? 2.5/4

Exercice 3

1) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation : pour $\boxed{n=1}$ $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

On ne peut pas le supposer! On veut le démontrer!

Hérédité : On suppose que l'expression est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On veut alors prouver qu'elle est vraie au rang $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n+1(n+2)}{2}$

H.R. :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{CQFD}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'expression est vraie.

2) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Initialisation : $\boxed{n=1}$: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = (1)^2 = 1$

Hérédité : On suppose que l'expression est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On doit alors pouvoir démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$

H.R. : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3$?? $\left[\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right]^2$ pourquoi c'est vrai?

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\right]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}\right]^2$$
$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \quad \text{CQFD}$$

1/4

Conclusion : l'expression est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

$$x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4|$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2 \\ -x+2 & \text{si } x-2 \leqslant 0 \iff x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } 2x+4 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2 \\ -2x-4 & \text{si } 2x+4 \leqslant 0 \iff x \leqslant -2 \end{cases}$$

- Sur $]-\infty ; -2]$: $x - 1 - x + 2 \geqslant -2x - 4$

$\iff 5 \geqslant -2x$

$\boxed{-\frac{5}{2} \leqslant x}$

$S = [-\frac{5}{2} ; -2]$

- Sur $[-2 ; 2]$: $x - 1 - x + 2 \geqslant 2x + 4$

$\iff -3 \geqslant 2x$

$\boxed{-\frac{3}{2} \geqslant x}$

$S = [-2 ; -\frac{3}{2}]$

- Sur $[2 ; +\infty[$: $x - 1 + x - 2 \geqslant 2x + 4$

$\iff 2x - 3 \geqslant 2x + 4$

$-3 \geqslant 4$ IMPOSSIBLE

$S = \emptyset$

$S_{TOTAL} = [-\frac{5}{2} ; -2] \cup [-2 ; -\frac{3}{2}] = [-\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}]$

4/4

Exercice 5

1) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$ $L_2 \Rightarrow L_2 + L_1$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ y - 3x - z = -9 \\ 5x - z = 7 \end{cases}$ $L_2 \Rightarrow L_1$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 7x - z = 11 \\ y - 3x - z = -9 \\ 5x - z = 7 \end{cases}$ $L_1 \Rightarrow L_1 - 2L_2$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ y - 3x - z = -9 \\ 5x - z = 7 \end{cases}$ $L_1 \Rightarrow L_1 - L_3$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} y - z - 3x = -9 \\ -z + 5x = 7 \\ 2x = 4 \end{cases}$ $L_2 \Rightarrow L_1$ $L_3 \Rightarrow L_3$

- $2x = 4 \iff \boxed{x = \frac{4}{2} = 2}$

- $-z + 5x = 7 \iff -z + 10 = 7 \iff \boxed{z = 3}$

- $y - z - 3x = -9 \iff y - 3 - 6 = -9$
  $\iff \boxed{y = 0}$

$S = \{(2;0;3)\}$

2) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ -2y + 4x + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$

$\underset{L_2 \to L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$

$\underset{L_2 \to L_2 + L_3}{\iff} \begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ 0 = 2 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$

L'expression $0 = 2$ est fausse donc il n'y a pas de solution.

$$\boxed{S = \emptyset}$$

3.5/4