1|2 |3|4|5
4|2.5|2|4|4

Mathématiques
Devoir Maison

16.5/20

Exercice 1

Saient P et Q deux propositions logiques.

1) Table de vérité de la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F

2) Table de vérité de la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F

3) Deux propositions sont équivalentes si elles ont la même table de vérité.

Or les propositions $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ont la même table de vérité (voir exercices 1 et 2 ci-dessus)

Donc elles sont équivalentes.

Or, selon les formules équivalentes:

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

Ce qui se vérifie par la table de vérité de $(P \Leftrightarrow Q)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
V	V	V
V	F	F
F	V	F

En effet cette table de vérité est identique à celle de la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Donc les propositions sont équivalentes

On si $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est équivalente à $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

Alors $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ sont équivalentes.

4/4

Exercice 2

1) La définition de "f admet un maximum" est associée à la proposition logique $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2) La définition de "f n'admet pas de minimum" est associée à la proposition logique $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

3) Montrez que quelle que soit f, la proposition $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ est toujours vraie.

Cela revient à montrer que quelle que soit f, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) - f(y) \leq 0$ ce qui est tout le temps vrai car on peut toujours trouver une valeur de f(x) plus petite ou égale à f(y), même si la fonction admet un maximum ou un minimum.

pourquoi on peut toujours trouver une telle valeur?

2.5/4

Exercice 3

1) Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(n): \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation :

$$P(1): \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Donc la proposition est vraie au rang $n=1$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est

vraie

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc la proposition est vraie au rang $n = n+1$

Conclusion:

$P(1)$ et $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ sont vraies pour tout n donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(n) : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Initialisons :

$$P(1) : \sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 = \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1^2 = 1$$

Donc la propriété est vraie au rang $n=1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3$$

et comme $P(n)$ est supposée vraie $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$

?????

2/4

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$x - 1 + |x - 2| \geq |2x + 4|$$

Pour résoudre l'inéquation il faut tenir compte du signe de $x - 2$ et $2x + 4$

Il faut donc déterminer la position de x par rapport à 2 et à -2

Si $x < -2$ alors :

$$\begin{aligned} \rightarrow x - 2 < 0 \text{ et } |x - 2| &= -(x - 2) \\ \rightarrow 2x + 4 < 0 \text{ et } |2x + 4| &= -(2x + 4) \end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre

$$x - 1 - (x - 2) \geq -(2x + 4)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -2x - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{2} \leq x$$

Les solutions dans l'intervalle $] -\infty ; -2 [$ sont l'intervalle $[\frac{-5}{2} ; -2 [$.

Si $-2 \leq x < 2$ alors :

$$\begin{aligned} \rightarrow x - 2 < 0 \text{ et } |x - 2| &= -(x - 2) \\ \rightarrow 2x + 4 \geq 0 \text{ et } |2x + 4| &= 2x + 4 \end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre

$$x - 1 - (x - 2) \geq 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2} \geq x$$

Les solutions sur l'intervalle $[-2 ; 2 [$ sont l'intervalle $[-2 ; \frac{-3}{2}]$

Si $x \geq 2$ alors :

$$\rightarrow x - 2 \geq 0 \text{ et } |x - 2| = x - 2$$

$$\rightarrow 2x + 4 > 0 \text{ et } |2x + 4| = 2x + 4$$

Ce qui revient à résoudre

$$x - 1 + x - 2 \geq 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 \geq 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow -7 \geq 0$$

Le résultat de l'équation est faux car $-7 < 0$.

Donc sur l'intervalle $[2; +\infty[$ il n'y a pas de solutions.

Sur $\mathbb{R}$ tout entier, les solutions sont les éléments de l'intervalle $[-\frac{5}{2}; -2[$ et $[-2; -\frac{3}{2}]$ soit $[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$.

Exercice 5 Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants

$$1) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 4x - 2y + 2z = 14 & L_2 \\ -3x + y - z = -9 & L_3 \end{cases}$$

Pour résoudre le système, il faut d'abord l'échelonner

$$L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases}$$

$$L_3 \rightarrow -10L_3 - 7L_2$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

Puis il faut le résoudre

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0 - 9 = -7 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ce système n'a qu'une solution $\{(2; 0; 3)\}$

$$2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & (L1) \\ 4x - 2y + 2z = 14 & (L2) \\ -5x \quad \quad + 2z = -5 & (L3) \end{cases}$$

Pour résoudre le système, il faut d'abord l'échelonner.

$$L3 \rightarrow L3 + 5L1$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases}$$

$$L2 \rightarrow L2 - 4L1$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases}$$

4/4

$$L3 \rightarrow L3 + L2 \quad \text{et} \quad L2 \rightarrow L2 + L3$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 0 = 2 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Les lignes $L3$ et $L2$ présentent des équations fausses et impossibles

Les équations du système sont donc incompatibles

Donc le système n'a pas de solutions