

Vaulgr
Nemul
PM101 E22

Devoir maison de
Bases mathématiques
pour les sciences

1|2|3|4|5
4|4|4|1|3.5

16.5/20

Exercice 1

1)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

" $P \Leftrightarrow Q$ " correspond à
" $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ "

On voit que les tables de vérité de " $P \Leftrightarrow Q$ " et " $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ " sont les mêmes. Cela signifie donc que ces propositions sont équivalentes.

Exercice 2:

la proposition logique associée à

- 1) "f admet un maximum", en suivant la proposition logique associée à "f admet un minimum" est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$$

- 2) Cela correspondrait à la négation de la proposition logique "f admet un minimum" et donc la suivante:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

- 3) Montrons par l'absurde que " $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ " est toujours vraie.

On suppose alors que sa négation est vraie et on exhibe une contradiction.

Supposons donc que " $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ " est vraie.

Seulement $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ ainsi pour tout y de $\mathbb{R}$ il y aura un x dans $\mathbb{R}$ tel que $y = x$.

Et donc $f(x)$ strictement supérieur à $f(y)$ n'est pas possible si $x = y$. En effet on aurait:

$$f(x) = f(y)$$

Ainsi comme $p \vee \neg(p)$ est toujours vraie et que l'on a montré que $\neg(p)$ est fausse, cela signifie que p est vraie.

Exercice 3

1) On a la proposition suivante : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation : On montre que la proposition est vraie au premier rang, c'est à dire pour $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

la proposition est vraie pour $n=1$.

Hérédité : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* (P(n) \Rightarrow P(n+1))$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{On veut } \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On retrouve ce que l'on souhaitait.
la proposition est héréditaire.

la proposition est vraie pour $n=1$ et elle est héréditaire.
Donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$2) P_n: \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Initialisation : pour $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \quad \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1^2 = 1$$

P_n est vraie au 1^{er} rang.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie et on montre que P_{n+1} est vraie.

$$\text{On a donc } \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$\text{De plus } \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k \times \sum_{k=1}^n k$$

$$\text{Or d'après la question 1 } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n^2+n)(n^2+n)}{4} = \sum_{k=1}^n k^3 \end{aligned}$$

On cherche ainsi à montrer :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 = \frac{((n+1)^2 + n+1)((n+1)^2 + n+1)}{4}$$

Si on développe l'expression :

$$\begin{aligned}
 \frac{((n+1)^2 + n + 1)((n+1)^2 + n + 1)}{4} &= \frac{(n^2 + 2n + 1 + n + 1)(n^2 + 2n + 1 + n + 1)}{4} \\
 &= \frac{(n^2 + 3n + 2)(n^2 + 3n + 2)}{4} \\
 &= \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 3n^3 + 9n^2 + 6n + 2n^2 + 6n + 4}{4} \\
 &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}
 \end{aligned}$$

On part de :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k^3\right) = \left(\sum_{k=1}^n k^3\right) + (n+1)^3$$

D'après la formule du binôme : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

$$\begin{aligned}
 (n+1)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} n^k \times 1^{3-k} \quad \text{A } 3-k \text{ sera toujours égal à 1} \\
 &= \binom{3}{0} n^0 + \binom{3}{1} n^1 + \binom{3}{2} n^2 + \binom{3}{3} n^3 \quad \text{je ne le ferai pas apparaître} \\
 &= 1 + 3n + 3n^2 + n^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^3\right) &= \frac{(n^2+n)(n^2+n)}{4} + (1 + 3n + 3n^2 + n^3) \\
 &= \frac{n^4 + n^3 + n^3 + n^2 + 4 + 12n + 12n^2 + 4n^3}{4} \\
 &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2
 \end{aligned}$$

la propriété est héréditaire

En conclusion, la propriété est vraie pour $n=1$
et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4/4

Exercice 4:

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+4|$$

Étudions le signe de $(x-2)$ et $(2x+4)$ dans $\mathbb{R}$.

$$x-2=0$$

$$x=2$$

$$2x+4=0$$

$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$2x+4$	-	0	+	+

Sur $] -\infty, -2]$ on a l'équation:

$$x-1 - (x-2) \geq -(2x+4)$$

$$x-1-x+2 \geq -2x-4$$

$$1 \geq -2x-4$$

$$5 \geq -2x$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

faux

les solutions sont $S = [-\frac{5}{2}, +\infty[$ sur $] -\infty, -2]$

Sur $[-2, 2]$ on a :

$$\begin{aligned}x-1-x+2 &\geq 2x+4 \\1 &\geq 2x+4 \\-3 &\geq 2x \\x &\leq -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \text{ sur } [-2, 2] \quad \text{faux}$$

Sur $[2; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}x-1+x-2 &\geq 2x+4 \\2x-3 &\geq 2x+4 \\2x-3-2x-4 &\geq 0 \\-7 &\geq 0 \quad \text{impossible}\end{aligned}$$

Pas de solution sur $[2; +\infty[$.

Au final nous avons :

$$S = [-\frac{5}{2}; +\infty[\text{ sur }]-\infty; -2]$$

$$S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \text{ sur } [-2, 2]$$

Si l'on regroupe les intervalles de solutions, on obtient???
que l'ensemble des solutions est $S = [-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$.

Exercice 5:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$4L_1: 4x + 8y - 12z = -28$$

$$3L_2: 3x + 6y - 9z = -21$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -10y + 14z = 42 \\ 7y - 8z = -30 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 - 4L_1 \\ L_3 + 3L_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -5y + 7z = 21 \\ 7y - 8z = -30 \end{cases} \quad \frac{1}{2}L_2$$

$$7L_2: -35y + 49z = 147$$

$$5L_3: 35y - 40z = -150$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -5y + 7z = 21 \\ 9z = -3 \end{cases} \quad 5L_3 + 7L_2$$

$$9z = -3 \quad -5y - \frac{7}{3} = 21$$

$$z = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} -5y &= 14 \\ y &= -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

$$x - \frac{28}{5} - 2 = -7$$

$$x = -7 - 1 + \frac{28}{5}$$

$$x = \frac{-35 - 5 + 28}{5}$$

$$x = -\frac{12}{5}$$

on a $x = -\frac{12}{5}$ $y = -\frac{14}{5}$ $z = -\frac{1}{3}$.

Vérifions dans L_2 :

$$\begin{aligned} -\frac{12}{5} - 2 \times \frac{14}{5} + 3 \times \frac{1}{3} &= -\frac{12}{5} - \frac{28}{5} + 1 \\ &= \frac{-12 - 28 + 5}{5} = \frac{-35}{5} = -7 \end{aligned}$$

la solution du système est : $\left\{ \left(-\frac{12}{5}; -\frac{14}{5}; -\frac{1}{3} \right) \right\}$.
???

$$2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x \quad \quad + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 5x \quad \quad - z = 7 \\ -5x \quad \quad + z = -5 \end{cases} \quad L_2 + L_3$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ 0 = 2 \end{cases} \quad L_3 + L_2$$

$0 = 2$: impossible, il n'y a donc aucune solution pour ce système.

3.5/4

