

1/2 | 3/4/5
4/3.5/4/0/4

Devoir maison de mathématiques.

Gnp: E22

AYUSO
Lucas

15.5/20

CERVERA

Pierre-Luc

Exercice 1:

1) La table de vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est:

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F

LÉGRAND

Theo

2) La table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est:

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow P)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F

3) On cherche la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$, que l'on comparera à celle de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ à la question 1.

P	Q	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	F

On a bien des tables de vérité identiques pour ces propositions. Elles sont donc équivalentes.

4/4

Exercice 2:

1) Nous associerons la définition de " f admet un maximum" à la proposition

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$$

2) La définition de " f n'admet pas de minimum" serait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \underline{\geq} f(y) \quad >$$

3) On considère la proposition :

$$P = \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

$$TP = \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

Or, quand $x=y$, $f(x) > f(y)$ est fausse, donc TP est toujours fausse.

Donc, comme TP est toujours fausse, P est toujours vraie. **3.5/4**

Exercice 4:

Réponse $x - 1 + |x - 2| \geq |2x + 4|$ sur $\mathbb{R}$.

On procède par disjonction de cas:

Soit $u = |x - 2|$ et $v = |2x + 4|$, les cas à étudier sont :

$$u \geq 0 \text{ et } v \geq 0, \quad u \geq 0 \text{ et } v \leq 0, \quad u < 0 \text{ et } v \geq 0, \quad u < 0 \text{ et } v < 0$$

Commençons par regarder les intervalles de définition de ces cas:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$
$2x+4$	$-$	$-$	0	$+$

$u > 0$ et $v > 0$ est défini sur $]2; +\infty[$

$u > 0$ et $v < 0$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}$.

$u < 0$ et $v > 0$ est défini sur $] -2; 2[$.

$u < 0$ et $v < 0$ est défini sur $] -\infty; -2[$.

Résolution:

$u > 0$ et $v > 0$:

$$x-1+x-2 \geq 2x+4$$

$$2x-3 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 4$$

Impossible, pas de solution sur $]2; +\infty[$.

$u < 0$ et $v < 0$:

$$x-1-x+2 \geq -2x-4$$

$$1 \geq -2x-4$$

$$-5 \geq -2x$$

$$-\frac{5}{2} \leq x$$

$-\frac{5}{2}$ est solution sur $] -\infty; -2[$

$u < 0$ et $v > 0$

$$x-1-x+2 \geq 2x+4$$

$$1 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 2x$$

$$-\frac{3}{2} \geq x$$

$-\frac{3}{2}$ est solution sur $] -2; 2[$

Les solutions de l'équation sont:

sur $] -\infty; -2[$, $-\frac{5}{2}$

sur $] -2; 2[$, $-\frac{3}{2}$.

pas de solution sur $]2; +\infty[$

???????

0

Exercise 5:

1)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{10}y \\ 4(2 + \frac{1}{10}y) - 2y + 2(3 + \frac{7}{10}y) = 14 \\ z = 3 + \frac{7}{10}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{10}y \\ 8 + \frac{4}{10}y - 2y + 6 + \frac{14}{10}y = 14 \\ z = 3 + \frac{7}{10}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ z = 3 + \frac{7}{10}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{10}y \\ \frac{18}{10}y - 2y = 0 \\ z = 3 + \frac{7}{10}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3(3 + \frac{7}{10}y) = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ z = 3 + \frac{7}{10}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 9 - \frac{21}{10}y = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ z = 3 + \frac{7}{10}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{10}y \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ z = 3 + \frac{7}{10}y \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 = -7 \\ y = 7x - 11 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

Impossible, pas de solutions.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2(5x - 5) = 14 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

4/4

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 10x - 10 = 14 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 14x - 2y = 24 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ y = 7x - 11 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2(7x - 11) - 3(5x - 5) = -7 \\ y = 7x - 11 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 14x - 22 - 15x + 15 = -7 \\ y = 7x - 11 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

Exercice 3:

1) Initialisation:

Pour $n=1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1$$

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

On a $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, la propriété est initialisée.

Hérédité: On considère la propriété vraie au rang n , on la démontre au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k$$

$$\text{et } \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\sum_{k=1}^n k} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\text{On a bien } \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3:

2) Initialisation:

Pour $n=1$:

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1$$

$$\left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 = 1^2 = 1 \quad (\text{vrai})$$

On a $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$, la propriété est initialisée.

Hérédité: On considère la propriété vraie au rang n , on la démontre au rang $n+1$.

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

et

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}_{= \sum_{k=1}^n k^3} + (n+1)^3$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\text{On a bien } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2.$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.