

1|2 |3|4|5
4|2.5|4|0|3

Bauché de nitray Océane
PM101 E22

13.5/20

Bases mathématiques pour les
sciences

Exercice 1:

1) Établissons la table de vérité de la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$:

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2) La table de vérité de la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q (= (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3) Les propositions $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $P \Leftrightarrow Q$ ont la même table de vérité. On en conclut donc que ces deux propositions sont équivalentes.

Exercice 2:

1) "f admet un maximum" devrait être associé à la proposition logique suivante:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y).$$

2) La définition de "f n'admet pas de minimum" serait la négation de "f admet un minimum" donc:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y).$$

3)

2.5/4

Exercice 3:

1) Initialisation: pour $n = 1$, on a:

$$P(1): \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ donc } P(1) \text{ est vraie}$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Donc $P(m+1)$ est vraie.

Conclusion: Comme, pour tout $m \in \mathbb{N}^+$, $(P(m) \Rightarrow P(m+1))$ et $P(1)$ vraie, alors on en conclut que $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^+$.

2) Comme $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$, alors on a:

$$\left(\sum_{k=1}^m k \right)^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

Montrons donc que : $\sum_{k=1}^m k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$

Initialisation: $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité: soit $m \in \mathbb{N}^+$, on suppose $P(m)$ vraie.

$$\begin{aligned} P(m+1) &= \sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\ &= (m+1)^2 \times \frac{m^2 + 4(m+1)}{4} \\ &= (m+1)^2 \times \frac{(m+2)^2}{4} \\ &= \frac{(m+1)^2((m+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Donc $P(m+1)$ est vraie.

Conclusion: La proposition $P(m)$ est donc vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^+$ puisque $P(1)$ est vraie et que $P(m) \Rightarrow P(m+1)$.

4/4

Exercice 4:

On a $x-2 \leq 0$ si $x \leq 2$ et $x-2 > 0$ si $x > 2$, donc
 $|x-2| = -x+2$ sur $]-\infty; 2]$ et $|x-2| = x-2$ sur $[2; +\infty[$.
 De même, $|x+2| \Leftrightarrow |x+2| = -x-2$ sur $]-\infty; -2]$ et $|x+2| = x+2$ sur $[-2; +\infty[$.

Ainsi : sur $]-\infty; -2]$, l'inéquation équivaut à :

$$x-1+(-x+2) > (-x-2) \Leftrightarrow 1 > (-x-2) \\ x > -3$$

Donc il y a deux solutions sur cet intervalle : $S = \{-3; -2\}$.

- Sur $[-2; 2]$, l'inéquation équivaut à :

$$x-1+(-x+2) > x+2 \Leftrightarrow 1 > x+2 \\ \Leftrightarrow -1 > x \\ \Leftrightarrow x < -1$$

Donc il y a deux solutions sur cet intervalle : $S = \{-2; -1\}$.

- Sur $[2; +\infty[$, l'inéquation équivaut à :

$$x-1+x-2 > x+2 \Leftrightarrow 2x-3 > x+2 \\ x > 5$$

Donc l'ensemble de solutions sur cet intervalle est : $[5; +\infty[$.

Sur $\mathbb{R}$ tout entier, les solutions sont finalement $[-3; -1] \cup [5; +\infty[$.

Exercice 5 :

$$1) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 2x - y + z = 7 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -5y + 7z = -7 \\ 7y - 10z = -30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -5y + 7z = -7 \\ -1z = -199 \end{cases}$$

Donc : $-1z = -199$ / $-5y = -1400$ / $x - 3z = -7$

$$z = \frac{-199}{-1} \quad y = \frac{-1400}{-5} \quad \boxed{x = 30}$$

$$\boxed{z = 199} \quad \boxed{y = 280}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 2x - y + z = 7 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -5y + 7z = -7 \\ 10y - 14z = -40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -5y + 7z = -7 \\ 0 = -54 \end{cases}$$

3/4

Le système est échelonné, mais il n'a aucune solution à cause de la dernière équation.