

Hugo DAVID
Malik Buzsian
Richs roudeau

Devoir Maison
de
Mathématiques

1|2 |3|4|5
4|2.5|3|1|4

14.5/20

Exercice 1:

1) table de vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2) P Q $P \Rightarrow Q$ $Q \Rightarrow P$ $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3) On connaît d'après le point (1) la table de vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et on connaît aussi la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ qui est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

alors les propositions $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $P \Leftrightarrow Q$ sont bien équivalentes.

Exercice 2:

- 1) la proposition " f admet un maximum" est
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$
- 2) la définition de " f n'admet pas de minimum" est.
 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y) >$
- 3) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$.

y et x se situe dans l'intervalle qui est définie sur $]-\infty; +\infty[$, pour tout y , il existe un $x \leq y$ et on sait aussi que si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$ quelque soit l'application effectuée, ce qui n'est pas toujours vrai pour $x < y$.

2.5/4

ex: $f(x) = -3x$ $y = 2$ $x = 1$
 $f(y) = -3 \times 2 = -6$
 $f(x) = -3 \times 1 = -3$ $x >$

??????????

donc la proposition est vraie car il existe toujours un x qui est égale à n'importe quel y sur $\mathbb{R}$

Exercice 3:

$$1) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation : il faut démontrer que cette égalité est vraie pour $n=1$.

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \text{donc}$$

c'est vrai pour $n=1$.

hérédité : il faut maintenant démontrer que cette égalité est vraie pour $n+1$. ?????????

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^n k \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2} (2+n) = \frac{(n+1)(1+n+1)}{2}$$

conclusion : cette égalité est vraie pour $n+1$
donc elle est toujours vraie pour $\mathbb{N}^+$.

$$2) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Initialisation : il faut démontrer que cette égalité est vraie pour $n=1$.

$$\sum_{k=1}^1 1^3 = \left(\sum_{k=1}^1 1 \right)^2 \Rightarrow 1^3 = (1)^2$$

hérédité: il faut maintenant démontrer que
égalité est vraie pour $n+1$. ?????????

$$(n+1 + \sum_{k=1}^n k)^2 = (n+1)^2 + \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 + 2(n+1) \sum_{k=1}^n k$$

car d'après l'énoncé
on a $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$

$$= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1) \left(n+1 + 2 \sum_{k=1}^n k \right)$$

or d'après la question 1 on a
 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

alors
$$= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1) \left((n+1) + 2 \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)(n+1)(1+n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

conclusion: cette égalité est donc vraie pour
 $n+1$ donc cette égalité est vraie
pour tout $n \in \mathbb{N}^+$

Exercice 4:

$$x-1+|x-2| \geq |2x+4|$$

si dans cette inégalité, $2x+4 \leq 0$ alors
 $x-2 < 0$ on a alors

$$x-1-(x-2) \geq -(2x+4)$$

$$1 \geq -2x-4$$

$$5 \geq -2x$$

$$-\frac{5}{2} \leq x$$

si dans cette inégalité, $x-2 < 0$, $2x+4 > 0$ sur
 $]-2; 2[$ alors on a x

$$x-1+|x-2| \geq |2x+4|$$

$$x-1-(x-2) \geq 2x+4$$

$$1 \geq 2x+4$$

$$-\frac{3}{2} \geq x$$

et si dans cette inégalité $x-2 > 0$ et $2x+4 > 0$
alors on a

$$x-1+|x-2| \geq |2x+4|$$

$$x-2x-3 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 4 \quad \text{ce qui est impossible}$$

alors le domaine de solution est

$$x \in \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right] \quad \text{mal justifié}$$

Exercice 5:

$$1) \begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases} \Rightarrow L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{cases} x+4x+2y-2y-3z+2z=-7+14 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-z=7 \\ 4x-2y+2z=14 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\begin{cases} 5x-z=7 \\ 4x-6x-2y+2y+2z-2z=14-18 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-z=7 \\ -2x=-4 \\ -3x+y-z=-9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_3 \\ L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 \rightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} -3x+y-z=-9 \\ 5x-z=7 \\ -2x=-4 \end{cases}$$

also $x=2$
 $-z=7-5 \times 2$
 $z=3$ et

$$y = z + 3x - 9$$
$$= 3 + 6 - 9$$

$$y = 0$$

$$2) \begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ -2y + 4x + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ -2y + 2y + 4x + x + 2z - 3z = 14 - 7 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ 5x - 5x + z - z = 7 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + x - 3z = -7 \\ 5x - z = 7 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

$0 = -2$ est impossible
donc le système
n'a pas de solution.