1|2|3 |4|5
4|1|2.5|1|4

CAYSSIALS Cyril

Devoir Maison BMS

12.5/20

Exercice 1

(1) Table de Vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

(2) Table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

(3) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ revient a dire $P \Leftrightarrow Q$
Et les tableaux de vérite des deux propositions si dessus sont identiques, donc :

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = (P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$, donc

$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ equivaut a $P \Leftrightarrow Q$

4/4

Exercice 2

(1) On peut associer la définition de "f admet un maximum" a la proposition :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(y) \leq f(x)$$

(2) "f n'admet pas de minimum" a pour proposition logique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$ >

1/4

Exercice 3

① Demonstration par recurrence de $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation . pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

C'est vrai car les deux membres valent 1

Heredité : On suppose maintenant la propriété vraie au rang n

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

La propriété est vraie au rang $n+1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

② On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Initialisation?????

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$???

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

2.5/4

Exercice 4

Resoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad x - 1 + |x-2| \geqslant |2x+4|$

$x - 1 + |x-2|$

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$
$x-1+\|x-2\|$	$x-1-x+2$ $=1$	1	$x-1+x-2$ $=2x-3$

$$x - 1 + |x-2| \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \\ 2x-3 & \text{si } x \in]2 ; +\infty[\end{cases}$$

$|2x+4$

x	$-\infty$ -2	$+\infty$
$2x+4$	$-$ 0	$+$
$\|2x+4\|$	$-2x-4$ 0	$2x+4$

$$|2x-4| \begin{cases} -2x-4 & \text{si } x \in]-\infty ; -2] \\ 2x+4 & \text{si } x \in]-2 ; +\infty[\end{cases}$$

$1 \geqslant -2x - 4$ sur $]-\infty ; 2]$ equivaut a $x \geqslant -\frac{5}{2}$
$2x - 3 \geqslant -2x - 4$ sur $]2 ; +\infty[$ equivaut a $x \leqslant -\frac{1}{4}$

$1 \geqslant 2x + 4$ sur $]-\infty ; 2]$ equivaut a $x \leqslant -\frac{3}{2}$
$2x - 3 \geqslant 2x + 4$ sur $]2 ; +\infty[$ n'a pas de solution

$S_1 =]-\infty , 2] \cap [-\frac{5}{2} , +\infty[= [-\frac{5}{2} ; 2]$
$S_2 =]2 , +\infty[\cap]-\infty ; -\frac{1}{4}] = \emptyset$
$S_3 =]-\infty , 2] \cap]-\infty ; -\frac{3}{2}] =]-\infty ; -\frac{3}{2}]$?????

$S = [-\frac{5}{2} ; 2] \cup]-\infty ; -\frac{3}{2}] =]-\infty ; 2]$ **1**

Exercice 5

(1)
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 4x - 2y + 2z = 14 & L_2 \\ -3x + y - z = -9 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 5x - z = 7 & L_2 \to L_2 + L_1 \\ -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}z = -\frac{25}{2} & L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 5x - z = 7 & L_2 \\ 5x - 5z = -25 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 5x - z = 2 & L_2 \\ -30x = -60 & L_3 \to L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

$-30x = -60$

$x = 2$

$5x - z = 7$

$10 - z = 7$

$z = 3$

$x + 2y - 3z = -7$

$2 + 2y - 9 = -7$

$y = 0$

Donc $S\{x = 2 \,;\, y = 0 \,;\, z = 3\}$

(2) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 4x - 2y + 2z = 14 & L_2 \\ -5x + z = -5 & L_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 5x - z = 7 & L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ -5x + z = -5 & L_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 5x - z = 7 & L_2 \\ 5x - z = -5 & L_3 \end{cases}$

L_2 et L_3 sont identiques et n'ont pas la meme valeur donc c'est impossible et le systeme n'a pas de solution

4/4