

Devoir maison

14.5/20

- Enzo
Lapvet
Valentin

Dubourg
Marin
Paillès
PM 101 E21

Exercice 1

(1) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
V	V	V	V	V

(2) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
V	V	F	V	V

(3) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V

Exercice 2

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

$$(1) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$$

$$(2) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

2.5/4

(3)

Exercice 3

$$(1) P(n): \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation: (n=1)

$$\sum_{k=1}^1 k = 1$$

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ où $P(n)$ est vraie montrons $P(n+1)$??????

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

avec $P(n)$ vraie

$$\text{Puis } \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)n + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$P(n+1)$ est vraie

Conclusion: On a montré que $P(1)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(2) \quad P(n) : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Initialisation : ($n=1$)

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$$

$$\left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1^2 = 1$$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ où $P(n)$ est vraie, montrons $P(n+1)$???????

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

pourquoi?

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \left(\frac{n+2}{4} \right)^2$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4} \left((n+1)+1 \right)^2$$

$$\text{Or } \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\text{donc } \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4} \left((n+1)+1 \right)^2$$

$P(n+1)$ est vraie

Conclusion : on a montré que $P(1)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 4

2.5/4

$$x-1 + |x-2| \geq |2x-4|$$

$$|x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$|2x-4| = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

* sur $]-\infty; -2]$

$$\begin{aligned} x-1 - x+2 &\geq -2x+4 \Leftrightarrow 1 \geq -2x+4 \\ \Leftrightarrow 5 &\geq -2x \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

* sur $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} x-1 - x+2 &\geq 2x+4 \Leftrightarrow 1 \geq 2x+4 \Leftrightarrow \\ -3 &\geq 2x \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

* sur $[2; +\infty[$

$$\begin{aligned} x-1 + x-2 &\geq 2x-4 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 2x-4 \\ \Leftrightarrow -3 &\geq 0 \\ \mathcal{S} &= \emptyset \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$

justifier!!!!

Enzo

Lopvet

- Valentin

Dubourg

Marin

Pailhès

Exercise 5

PM 101 E21

$$(1) \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ 6-3x+y-2z = -9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \Rightarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \Rightarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ 7y-10z = -30 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \Rightarrow 10L_3 + 7L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

$$-2z = -6 \Leftrightarrow \boxed{z = 3}$$

$$-10y + 14 \times 3 = 42 \Leftrightarrow -10y = 42 - 42 \Leftrightarrow -10y = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = 0}$$

$$x + 2 \times 0 - 3 \times 3 = -7 \Leftrightarrow x - 9 = -7 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$$

$$(2) \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ 6-5x+z = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \Rightarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \Rightarrow L_3 + 5L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ 10y-14z = -40 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \Rightarrow L_3 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

impossible

$$S = \emptyset$$

4/4