

Devoir Raisonnement Logique

1|2|3|4|5
4|4|2|4|4

exercice 1

(1) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

18/20

table de vérité:

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

(2) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

table de vérité:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

(3) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est équivalente à $P \Leftrightarrow Q$.

Pour le montrer on va en déduire leur table de vérité:

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V

Du, plus simplement, on connaît la table de vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et on sait que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = P \Leftrightarrow Q$.

Or, à l'aide des questions (1) et (2), on voit que ces deux propositions ont la même table de vérité.

Donc la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ est équivalente à $P \Leftrightarrow Q$.

4/4

exercice 2

(1) " f admet un maximum":
 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

(2) " f n'admet pas de minimum":
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

(3) Montrons par l'absurde que
 $P: \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ est
 toujours vraie.

Pour cela il faut montrer que la négation
 de P est fausse.

$$\neg P: \neg (\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y))$$

$$\neg P: \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

si il existe un y , pour tout x
 il y aura alors un y égal à x
 et $f(x) > f(y)$ donc la condition
 $f(x) > f(y)$ n'est pas possible.

On a alors $\neg P$ qui est fausse donc
 la proposition P est toujours vraie.

exercice 3

(1) Démontrons par récurrence :

$$P(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

initialisation :

$$\sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \text{donc } P(1) \text{ est vraie.}$$

hérédité :soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{avec } P(n) \text{ vraie.} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}, \quad P(n+1) \text{ est vraie.}$$

conclusion :

On a montré que $P(1)$ est vraie, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Démontrons par récurrence:

$$P(n) : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

initialisation:

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 = \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1, \text{ donc } P(1) \text{ est vraie.}$$

hérédité:

soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3 \text{ avec } P(n) \text{ vraie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis} \quad \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{2} + (n+1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + (n+1)^3 \end{aligned}$$

On obtient: ???????

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2, \quad P(n+1) \text{ est vraie.}$$

conclusion:

on a montré que $P(1)$ est vraie, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$) est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

exercice 4

$$x+1+|x-2| \geq |2x+4|$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x \leq 2 \end{cases}$$

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & x \geq -2 \\ -2x-4, & x \leq -2 \end{cases}$$

• pour $x \in]-\infty; -2]$

$$x-1-x+2 \geq -2x-4$$

$$1 \geq -2x-4$$

$$2x \geq -5$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

sur $] -\infty; -2]$ l'ensemble des solutions est $[-\frac{5}{2}; -2]$

• pour $x \in [-2; 2]$,

$$x-1-x+2 \geq 2x+4$$

$$1 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 2x$$

$$-\frac{3}{2} \geq x$$

sur $[-2; 2]$ l'ensemble des solutions est $[-2; -\frac{3}{2}]$

• pour $x \in [2; +\infty[$

$$x-1+x-2 \geq 2x+4$$

$$2x-3 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq +4$$

sur $[2; +\infty[$ l'ensemble des solutions est vide.

conclusion :

$$\begin{aligned} \text{l'ensemble total des solutions est} \\ \left[-\frac{5}{2}; -2\right] \cup \left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \emptyset \\ = \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

4/4

exercice 5

$$(1) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y - 3z = -7 \\ -3x + y - z = -9 \end{cases}$$

$$L_3 \rightarrow 2L_3 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y - 3z = -7 \\ -2x = -4 \end{cases}$$

$$L_2 \rightarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 14 \\ 5x - z = 7 \\ -2x = -4 \end{cases}$$

$$\text{on a } x = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\text{alors } z = \frac{5x - 7}{-1} = \frac{10 - 7}{-1} = -3$$

$$\text{et } y = \frac{14 - 2z - 4x}{-2} = \frac{14 - 6 - 8}{-2} = 0$$

$$\text{on contrôle : } x + 2y - 3z = 2 + 2 \times 0 - 3 \times (-3) = -7$$

donc l'ensemble des solutions est $\{(2, 0, -3)\}$.

$$(2) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y - 3z = -7 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 14 \\ 5x - z = 7 \\ -5x + z = -5 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 14 \\ 5x - z = 7 \\ 0 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{impossible}$$

le système n'a aucune solution.