

Exercice 1:

①

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

12/20

②

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

- ③ Pour démontrer que la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est équivalente à $P \Leftrightarrow Q$, on écrit la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ et on compare les tables de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si on compare la table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ avec juste avant avec celle de $P \Leftrightarrow Q$, on constate que les deux tables de vérité sont les mêmes. Donc que $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

4/4

Exercice 2:

① $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

② $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$

2.5/4

Exercice 4:

$$x-1 + |x-2| \geq |2x+4|.$$

On tient compte du signe de $x-2$ et $2x+4$ en distinguant les intervalles $]-\infty; -2]$, $[-2; 2]$, $[2; +\infty[$.

$$x-2 = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$2x+4 = \begin{cases} -(2x+4) & x \leq -2 \\ 2x+4 & x > -2 \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]-\infty; -2]$.

$$\begin{aligned} x-1 - (x-2) &\geq -2x-4 \\ 5 &\geq -2x \\ -\frac{5}{2} &\leq x \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est
 $]-\infty; -2]$??????

Sur l'intervalle $[-2; 2]$:

$$\begin{aligned} x-1 - (x-2) &\geq 2x+4 \\ -3 &\geq 2x \\ -\frac{3}{2} &\geq x \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est
 $[-2; 2]$????

Sur l'intervalle $[2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} x-1 + x-2 &\geq 2x+4 \\ 2x-3 &\geq 2x+4 \\ -3 &\geq 4 \rightarrow \text{Impossible} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est
 $\emptyset$.

L'ensemble des solutions est $]-\infty; -2] \cup [-2; 2]$

Exercice 5:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -3x+y-z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ 7y-10z = -30 \end{cases}$$

$L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ 7y-10z = -30 \end{cases}$$

$L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

$L_3 \rightarrow 10L_3 + 7L_2$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y+14z = 42 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -10y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{?? } x=2 \text{ 'ensemble des solutions est } \{(1, 0, 3)\}.$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ -5x+z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = 14 \\ 10y-14z = -40 \end{cases}$$

$L_3 \rightarrow 2L_3 + 5L_1$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 10y-14z = -40 \\ 4x-2y+2z = 14 \end{cases}$$

$L_2 \rightarrow L_2$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 10y-14z = -40 \\ -10y+14z = 42 \end{cases}$$

$L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1$

$$\begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 10y-14z = -40 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

$L_3 \rightarrow L_3 + L_2$

l'ensemble des solutions est $\{ \emptyset \}$

$\emptyset$

Exercice 3:

- ① On commence par énoncer la proposition que l'on veut démontrer par récurrence, ici:

$$P(m): \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Initialisation:

Pour $m=1$ $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité: soit $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(m)$ vraie.

Montrons $P(m+1)$: $\sum_{k=1}^{m+1} k = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ ???}$

On pose: $\frac{m(m+1)}{2} + m+1 = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2} = \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$ et

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$$

Donc $P(m+1)$ est vraie $\forall m \in \mathbb{N}^* \text{ ???}$

Alors $P(m)$ est vraie $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

② $P(m): \sum_{k=1}^m k^2 = \left(\sum_{k=1}^m k \right)^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

Initialisation:

Pour $m=1$ $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 = \left(\sum_{k=1}^1 1 \right)^2 = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité: soit $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(m)$ vraie.

Montrons que $P(m+1)$ est vraie: $\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{m+1} k \right)^2$

On pose: $\sum_{k=1}^m k^2 = \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^2 + (m+1)$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^2 + (m+1)^3$$

$$= \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^2 + (m+1)(m+1)^2$$

$$= \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^2 + \left(\frac{2(m+1)(m+1)}{2} \right)^2$$

$$= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + \frac{4(m+1)(m+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(m^2 + 4m + 4)(m+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(m+2)^2(m+1)^2}{4} = \left(\frac{(m+2)(m+1)}{2} \right)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m+1} k \right)^2$$

Donc $P(m+1)$ est vraie, de même pour $P(m)$ pour $m \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left(\sum_{k=1}^m k \right)^2$$

3/4