

LECOMTE  
Mathieu  
Groupe E21

Déroulé - maison BMS

1/2/3/4/5

4/4/4/4/4

Exercice 1.

1)

| P | Q | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ |
|---|---|------------|--------------|---------------------------------------|
| F | F | F          | F            | V                                     |
| F | V | V          | F            | F                                     |
| V | F | V          | F            | F                                     |
| V | V | V          | V            | V                                     |

2)

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ |
|---|---|-------------------|-------------------|----------------------------------------------|
| F | F | V                 | V                 | V                                            |
| F | V | V                 | F                 | F                                            |
| V | F | F                 | V                 | F                                            |
| V | V | V                 | V                 | V                                            |

3)

| P | Q | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|-----------------------|
| F | F | V                     |
| F | V | F                     |
| V | F | F                     |
| V | V | V                     |

4/4

D'après 1), les propositions  $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$  et  $P \Leftrightarrow Q$  ont les mêmes tables de vérité.

Donc  $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q) \equiv P \Leftrightarrow Q$ .

Exercice 2.

$f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$  si la proposition

suivante est vraie:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

1)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$

2) "f n'admet pas de minimum" est le contraire de la proposition de base.

Soit  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ .

3) On pose:  $P: \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$ .

On suppose que  $\neg P$  est vraie:

$$\neg P: \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$$

Or, si  $\neg P$  est vraie et si  $x = y$ , on a:

$$f(x) > f(x), \text{ ce qui est impossible}$$

Par conséquent, la proposition  $P$  est vraie.

4/4

### Exercice 3.

1) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose:

$$P(n): \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} //$$

Pour  $n=1$ :

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

$P(n)$  est vraie pour  $n=1$ .

À un certain rang  $m$  ( $m \geq 1$ ), on suppose :

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

Démontrons que  $P(m+1)$  est vraie :

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^m k + (m+1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Donc  $P(n)$  est vraie au rang  $m+1$ .

$P(n)$  est vraie pour  $n=1$  et est héréditaire.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2) \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ d'après 1).}$$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose

$$P(n): \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Pour  $n=1$ :

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$$

$P(n)$  est vraie pour  $n=1$ .

À un certain rang  $m$ , on suppose:

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

Démontrons que  $P(m+1)$  est vraie:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= (m+1)^2 \left( \frac{m^2}{4} + m+1 \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= (m+1)^2 \left( \frac{m^2 + 4m + 4}{4} \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \frac{(m+1)^2 + (m+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Donc  $P(n)$  est vraie au rang  $m+1$ .

$P(n)$  est vraie pour  $n=1$  et est héréditaire.

$$\text{Donc: } \forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 \quad \text{4/4}$$

Exercice 4:

$$x-1+|x-2| \geq |2x+4| \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Si  $x \leq -2$ :

$$\begin{aligned} x-2 < 0 \text{ et } |x-2| &= -x+2 \\ 2x+4 < 0 \text{ et } |2x+4| &= -2x-4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On résout: } x-1-x+2 &\geq -2x-4 \\ \Leftrightarrow 5 &\geq -2x \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{2} &\leq x \end{aligned}$$

Or  $-\frac{5}{2} \in ]-\infty, -2[$ , les éléments de  $[-\frac{5}{2}; -2[$  sont solutions.

Si  $-2 \leq x < 2$ :

$$\begin{aligned} x-2 < 0 \text{ et } |x-2| &= -x+2 \\ 2x+4 \geq 0 \text{ et } |2x+4| &= 2x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On résout: } x-1-x+2 &\geq 2x+4 \\ \Leftrightarrow -3 &\geq 2x \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\geq x \end{aligned}$$

Or  $-\frac{3}{2} \in [-2; 2[$ , les éléments de  $[-2; -\frac{3}{2}]$  sont solutions de l'inéquation.

Si  $x \geq 2$ :

$$\begin{aligned} x-2 &\geq 0 \text{ et } |x-2| = x-2 \\ 2x+4 &\geq 0 \text{ et } |2x+4| = 2x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On résout: } x-1 + x-2 &\geq 2x+4 \\ \Leftrightarrow -7 &\geq 2x \\ \Leftrightarrow -\frac{7}{2} &\geq x \end{aligned}$$

Or  $-\frac{7}{2} \notin [2; +\infty[$ , il n'y a pas de solutions dans cet intervalle.

Finalement, sur  $\mathbb{R}$  tout entier, les solutions sont les éléments de l'intervalle  $[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$ . 4/4

### Exercice 5:

$$1) \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 4x-2y+2z = -14 \\ 3x+y-z = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ -14x+2y = -28 \\ 10x-y = 20 \end{cases} \quad \begin{aligned} L_2 &\leftarrow -3L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow -3L_3 + L_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z = -7 \\ 6x = 12 \\ 10x-y = 20 \end{cases} \quad L_2' \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2y-3z = -7 \\ x = 2 \\ 20-y = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Ce système admet donc une unique solution:  
 $(x, y, z) = (2, 0, 3)$

$$2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x \quad \quad + 2 = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 14 \\ 14x - 2y \quad \quad = 24 \\ -5x \quad \quad + 2 = -5 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 2y \quad \quad = -1 \\ 14x - 2y \quad \quad = 24 \\ -5x \quad \quad + 2 = -5 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad \quad \quad 0 = 23 \\ 14x - 2y \quad \quad = 24 \\ -5x \quad \quad + 2 = -5 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

Le système n'a pas de solutions.

4/4