Lumba Luzolo Joyce

MP101E2

Lundi 26 octobre 2020

1	2	3	4	5
2	0	3	0	1

D.M de maths

6/20

Exercice 1:

1 _ $(P \cup Q) \Rightarrow (P \cap Q)$

P	Q	$P \cup Q$	$P \cap Q$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

la table de vérité?

2 _ $(P \Rightarrow Q) \cap (Q \Rightarrow P) = (P \cup Q) \Rightarrow (P \cap Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow Q \cap (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3 -

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \cup Q) \Rightarrow (P \cap Q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Expliquer!!!

2/4

Exercice 2 :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(a) \leq f(y)$$

1- " f admet un maximum "

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(a) \geq f(a)$ faux

2 - " f n'admet pas de minimum "

$\forall a \in \mathbb{R}^2, \exists y \in \mathbb{R}^2, f(a) < f(y)$ faux

3 - $\forall y \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, f(a) \leq f(y)$

Montrez que quelle que soit f, cette dernière proposition est toujours vraie

0

Exercice 3 :

1 - $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : Verifions que $P(1)$ est vrai

$P(1) = 1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

donc $P(1)$ est vraie

Heridité : Soit un entier $n \geq 1$ supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est heriditaire à partir du rang 1, donc par recurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2 - $\sum_{k=1}^{1} k^3$

Initialisation : Verifions que $P(1)$ est vraie

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$$

donc $P(1)$ est vraie

Héridité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que cela entraîne que $P(n+1)$ est vraie

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4(n+1)}{4}$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n+2}{4}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

$P(n+1)$ est vrai.

Conclusion. $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 1. De ce fait, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3 - $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$?????

Initialisation : Vérifions que $P(1)$ est vraie

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ A quoi ça sert?

$$= 1^2(1+1)(2\times 1^2+1)$$

$$= \frac{(1+1)\times 3}{6}$$

$$= \frac{2\times 3}{6} = 1$$

$P(1)$ est vraie

Heridité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n((n+1)+1)(2(n+1)+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1)) + 6n+6}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est heriditaire à partir du rang 1, donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$

Montrons que : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ **Vous l'avez déjà démontré!!**

cela revient à demontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{1} 1^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$= \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

$P(1)$ est vraie

~~Initialisati~~

Heredité : Supposons que P(n) est vraie

$$\sum_{k=1}^{n+1} k + (n+1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

Conclusion :

On constate $\sum_{k=1}^{n+1} k + (n+1)$ est bien égale à $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

3/4

Exercice 4 :

$a - 1 + |a-2| \geq |2a+4|$

a- $a - 1 = 0$

$a = 1$ cela signifie si $a \geq 1$ on aura $a - 1$

b- $|a-2| = 0$

$a - 2 = 0$

$a = 2$ pour $a \geq 2$ on aura donc $a - 2$

c- $|2a+4| = 0$

$2a + 4 = 0$

$2a = -4$

$a = -2$

Pour $a \geq -2$ on aura $2a+4$ et $a \leq -2$ on obtiendra $-2a-4$.

Tableau de signe.

	$-\infty$ -2	1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x+4$	$+$	$-$	$-$	$-$
	$-\frac{1}{4}$		$-5/2$	$-\frac{1}{4}$

1- $-x+1-x+2 \geq 2x+4$

$-2x+3 \geq 2x+4$

$-4x \geq 1$

$x \geq -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}$ appartient à l'intervalle $-\infty ; -2$ donc il est solution.

2- $x-1-x+2 \geq -2x-4$

$1 \geq -2x-4$

$2x \leq -5$

$x \leq -\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}$ ne fait pas partie de l'intervalle $[1;2]$

4- $x-1+x-2 \geq -2x-4$

$2x-3 \geq -2x-4$

$4x \geq -4+3$

$4x \geq -1$

$x \geq -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}$ ne peut pas être dans l'intervalle $2;+\infty$

donc on a une unique solution.

tout faux

0

$S = \{]-\infty ; -2] \}$

Exercice 58

1.
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = 9 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$

$$\begin{cases} x(1+4) + (2-2)y + (-3+2)z = -7+14 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -3x + y - z = 9 \end{cases} \quad 2L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ (-6-4)x + (2-2)y + (-2+2)z = 18+14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -10x = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\times\left(-\frac{16}{5}\right) - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 - z = 7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -z = 7 + 16 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 23 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -23 \\ 4\times\left(-\frac{16}{5}\right) - 2y + 2\times(-23) = 14 \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 23 \\ -\frac{64}{5} - 2y - 46 = 14 \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -23 \\ -2y = 14 + 46 + \frac{64}{5} \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -23 \\ y = -\frac{182}{5} \\ x = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

faux

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x \quad + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-5)x + 10y + (-15+1)z = -35-5 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y - 14z = -40 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y - 14z = -40 \\ (4+10)x - 2y + (2-2)z = 14+10 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y - 14z = -40 \\ 4x - 2y = 24 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y - 14z = -40 \\ (20-20)x - 10y + 4z = 70-20 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y - 14z = -40 \\ -10y + 4z = 50 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (10-10)y + (-14+4)z = -40+50 \\ -10y + 4z = 50 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10z = 10 \\ -10y + 4z = 50 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ -10y = 50 + 4 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = -\frac{27}{5} \\ -5x - 1 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = -\frac{27}{5} \\ -5x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = -\frac{27}{5} \\ x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

faux

1/4