

1|2|3 |4|5

4|1|3.5|0|3.5

Bases mathématiques pour les sciences
Devoir Maison

12/20

exercice 1: P et Q sont deux propositions

1. table de vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

2. table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \wedge Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V

3. Si deux propositions possèdent la même table de vérité alors elles sont équivalentes. D'après les questions (1) et (2), $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont deux propositions ayant la même table de vérité, elles sont donc équivalentes.

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sert à écrire $P \Leftrightarrow Q$, on peut le démontrer en faisant le tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ possède la même table de vérité que $P \Leftrightarrow Q$.

Or $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ équivaut à $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, ce qui signifie que $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ équivaut à $(P \Leftrightarrow Q)$.

4/4

exercice 3: Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que f admet un minimum si la proposition logique suivante est vraie:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

(1) "f admet un maximum"

La proposition logique que l'on peut associer avec cette définition est la suivante:

faux!

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$$

(2) "f n'admet pas de minimum" est la négation de la définition de l'énoncé. Alors la proposition pour cette énoncé est:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y) >$$

(3) Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la proposition :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y) \quad (1)$$

Raisonnement par l'absurde.

Si la négation de la proposition est fausse alors la proposition est vraie

$$\neg (\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y) \quad (2) >$$

On remplace $f(x)$ et $f(y)$ par x et y pourquoi???

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq y \quad (3)$$

?
?
?

Cette proposition est fausse.

Si cette proposition est fausse alors la proposition (2) est fausse également, donc la proposition (1) est vraie.

exercice 3.

(1) $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation : avec $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \quad \text{vraie}$$

Hérédité : On suppose que pour n , $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie
on veut démontrer qu'alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{donc pour le rang } n+1, \text{ l'égalité est vraie.}$$

Par récurrence, l'égalité $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$

(2) $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Initialisation : $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2 = 1^2 = 1 \quad \text{vraie}$$

Hérédité : On suppose que pour n , $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$ est vraie, on veut démontrer qu'alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$

On sait que $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = k^3 + (n+1)^3$????

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \times (n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

$n^2 + 4n + 4$
 $\Rightarrow (n+2)^2$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.
 Par récurrence, l'égalité $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$

exercice 4: dans $\mathbb{R}$ $x-1+|x-2| \geq |2x+4|$

$$|x-2| = \begin{cases} -x+2, & x \leq 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$|2x+4| = \begin{cases} -2x-4, & x \leq -2 \\ 2x+4, & x \geq -2 \end{cases}$$

• si $x \in]-\infty, -2]$

$$x-1+(-x+2) \geq -2x-4$$

$$x-1-x+2 \geq -2x-4$$

$$1 \geq -2x-4$$

$$5 \geq -2x$$

$$-\frac{5}{2} \leq x$$

faux!

L'ensemble des solutions sur $]-\infty, -2]$ est $]-\infty, -2]$

• si $x \in [-2, 2]$

$$x-1+(-x+2) \geq 2x+4$$

$$x-1-x+2 \geq 2x+4$$

$$1 \geq 2x+4$$

$$-3 \geq 2x$$

$$-\frac{3}{2} \geq x$$

faux

L'ensemble des solutions sur $[-2, 2]$ est $[-2, 2]$

$$\bullet \text{ si } x \in [2, +\infty[$$

$$x+1+x-2 \geq 2x+4$$

$$2x-3 \geq 2x+4$$

$$2x-2x \geq 4+3$$

$$0 \geq 7 \text{ impossible}$$

L'ensemble des solutions sur $[2, +\infty[$ est $\emptyset$

L'ensemble totale des solutions sont $]-\infty, -2] \cup [-2, 2]$
donc $]-\infty, 2]$. 0

exercice 5:

$$(1) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 & L_1 \\ 4x - 2y + 2z = 14 & L_2 \\ -3x + y - z = -9 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -2x & = -4 \end{cases} \quad L_3 = L_2 + 2L_1$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 6x - 2y + 2z = 14 \\ x & = 2 \end{cases}$$

$$L_2 = 2L_1 + 3L_3$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 14x - 2y & = 28 \\ x & = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ \quad -2y = 28 - 28 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ \quad -2y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ \quad y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

on remplace: $x + 2y - 3z = -7 \Leftrightarrow 2 - 3z = -7$
 $\Leftrightarrow -3z = -9$
 $\Leftrightarrow z = 3$

L'ensemble des solutions est $\{(2, 0, 3)\}$.

$$(2) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 4x - 2y + 2z = 14 \\ \quad + z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3(-5 + 5x) = -7 \\ 4x - 2y + 2(-5 + 5x) = 14 \\ \quad + z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 15 - 15z = -7 \\ 4x - 2y + 10z - 10 = 14 \\ z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14x + 2y = 8 \\ 14x - 2y = 24 \\ z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 8 + 14x \\ 14x - 2y = 24 \\ z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 + 7x \\ 14x - 2y = 24 \\ z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 + 7x \\ 14x - 2(4 + 7x) = 24 \\ z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 + 7x \\ 14x - 8 - 14x = 24 \\ z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 8 = 4 + 7x \\ -8 = 24 \\ z = -5 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 + 7x \\ 0 = 32 \\ z = -5 + 5x \end{cases} \quad \text{Impossible}$$

L'ensemble des solutions est $\emptyset$ (sans accolades!!!!)