

Exercice 1, note 2!

①

1. (a)

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

(b)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

(c)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2. $(\neg(P \Rightarrow \neg Q)) = \neg(\neg P \vee \neg Q) = P \wedge Q$.

3. (a) $\neg(P \Leftrightarrow Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

(b) $\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q) = (P \vee Q) \wedge (\neg Q)$.

Exercice 3.

$A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow D$ sont vrais.

1. Si en outre B est vraie, on en déduit que C est vraie, comme D.

2. " D est fausse, c'est que B est fausse.

3. " B " " A est fausse.

Exercice 4.

1.

P	Q	P ou Q	P et (P ou Q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

La réponse est donc (c).

2.

P	Q	P et Q	(P et Q) ou P
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

La réponse est donc (c).

Et c'est prévisible car

$$\begin{aligned} \text{Pet}(P \text{ ou } Q) &= (\text{Pet } P) \text{ ou } (\text{Pet } Q) \\ &= P \text{ ou } (\text{Pet } Q). \end{aligned}$$

Exercice 5. 1. $\neg(\neg P \wedge Q) = P \vee (\neg Q)$

(2)

La réponse est donc (b).

2. $\neg(P \text{ ou } (\text{non } Q)) = (\neg P) \wedge Q$

La réponse est (b).

3. $\neg(\neg P \vee \neg Q) = P \wedge Q$.

La réponse est (a).

Exercice 6. Cette négation est $(x^2 < 1 \vee x^2 \geq 2) \wedge (x^2 > 9 \vee x^2 \leq 0)$.

Exercice 7. Cette négation est $P \wedge (\text{non}(\text{non } Q)) = P \wedge Q$.

La contraposée est $(\text{non } Q) \Rightarrow P$.

Exercice 8. Oui, l'implication est vraie.

C : $(xy < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ ou } y < 0)$ est vraie comme contraposée d'une proposition vraie.

R : $xy \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$ est fausse. Ainsi : $(-1)^2 \geq 0$.

Exercice 9.

Supposons que le jeton carré soit bleu. Par A0, le jeton rond ne peut être bleu. Soit il est vert, auquel cas (par A2) le jeton carré est rouge !

C'est impossible. Soit il est rouge, auquel cas le jeton triangulaire est vert. D'où la configuration (not. év.) : (Cb, Rr, Tr).

Supposons que le jeton carré soit rouge. Par A3, le jeton triangulaire est vert. Mais alors le jeton rond est bleu. Et donc le jeton carré est vert (par A1) ! D'où une contradiction.

Supposons que le jeton carré soit vert. Alors (par A3) le jeton triangulaire est vert ! C'est impossible (par A0).

Ainsi, la seule configuration possible est (Cb, Rr, Tr).

Exercice 10.



On doit obligatoirement retourner la carte A, pour vérifier que le nombre au verso est pair.

- Il n'est pas nécessaire de retourner la carte B car de deux (3) choses l'une : soit figure au verso un entier impair, auquel cas l'implication est vraie comme sa contraposée, soit figure au verso un entier pair, auquel cas l'implication reste vraie.
- Il n'est pas nécessaire de retourner la carte 4 car que le verso ait une voyelle ou une consonne, l'implication reste vraie. (cf tableau)
- Enfin, il est nécessaire de retourner la carte 7 car si figure au verso une voyelle, l'implication sera fautive.

	P	Q	$P \Rightarrow Q$
carte A {	V	V	V
	V	F	F
carte B {	F	V	V
	F	F	V

P = "lettre est une voyelle"

Q = "le nombre est pair"

Exercice 11

1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x \leq 0 \text{ et } x \geq 1)$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ et } x^2 \geq 1$
3. $\exists p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z}, p < n$
4. Il existe un intervalle de $\mathbb{R}$ disjoint de $[0; 1]$, ou encore
 $\exists I \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x < 0 \text{ ou } x > 1$, ou encore
 un intervalle

$\exists$ un intervalle I de $\mathbb{R}$ inclus dans $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

Exercice 12. La première et la troisième.

Exercice 13. "f n'est pas bornée" $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M$

La définition proposée ensuite de "f est bornée" est fautive : à ce compte-là toute fonction serait bornée ! ($M = |f(x)|$ conviendrait !)

"f n'est pas croissante" $\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y \text{ et } f(x) < f(y)$

Ce n'est pas la même chose que "f est décroissante" : $x \mapsto e^{-|x|}$ n'est ni

croissante ni décroissante.

4

Exercice 14. On ne peut en conclure que deux choses : b) est vraie et c) est fausse.

Exercice 15.

1. est vraie ; sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}^*, x^2 \leq 0$. (seul 0 est de carré négatif ou nul)
($0^2 \leq 0$)
2. est fausse ; sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$.
3. est vraie ; sa négation est $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$. ($1^2 > 0$)
4. est fausse ; sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} \neq x$. ($\sqrt{(-2)^2} = 2$)
5. est vraie ; sa négation est $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x+y \neq 0)$ ($y = -x$)
6. est fausse ; sa négation est $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x+y \neq 0)$
($x = -y - 1$)

Exercice 16. (P) : c'est de 2. qu'il s'agit.

(Q) : c'est de 1. qu'il s'agit.

(R) : $\exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| \neq 0$, ou encore $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

(S) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

Exercice 17. 1. $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x < n$.

2. $\forall x \in \mathbb{I}, 1 \leq x \leq 2$.

Exercice 18. 1. R : $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1) \Rightarrow x \neq y$
C : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$

2. R : $(f(x) = 0) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, |f(x)| < \varepsilon)$

C : $(f(x) \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |f(x)| \geq \varepsilon)$

Exercice 19.

La contraposée est "Si m est pair, alors m^2 est pair."

Démontrer la contraposée, c'est aussi montrer la proposition directe en vertu du principe de contraposition. Alors -y donc :

$$(\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p) \Rightarrow m^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$$

Exercice 20. 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 8 \nmid (n^2 - 1) \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$

2. $\forall p \in \mathbb{N}, n \neq 2p \Rightarrow \nexists p \in \mathbb{N}, 8 \mid (n^2 - 1)$

3. Soit donc un entier n impair: $n = 2k+1$ pour un entier k . (5)

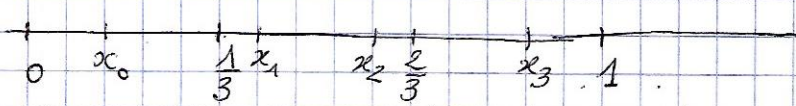
$$n^2 - 1 = 4 \underbrace{k(k+1)}_{\text{nécessairement pair}} \text{ est donc multiple de } 8.$$

4. Oui, en vertu du principe de contraposition.

Exercice 21. 1. $Q(x): "x \geq x^2 \Rightarrow x \geq 0"$.
2. Il suffit de remarquer que $x^2 \geq 0$ ($\forall x$).

Exercice 22. Soit donc x entier tel que $x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \sqrt{3}$ soit nul.
C'est impossible car si x est entier, $x^4 - 3x^3 + x^2 - x$ l'est aussi. Donc
puisque $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$, $x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \sqrt{3} \notin \mathbb{N}$.
Contradiction, car $0 \in \mathbb{N}$.

Exercice 23. Supposons un rangement de $(n+1)$ bonnets dans n tiroirs tel que
chaque tiroir contienne au maximum un bonnet.
Le nombre de bonnets dans les tiroirs ne peut excéder n .
Soit une contradiction ($n+1 > n$).

Exercice 24. 1. 
2. $\exists (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \mid |x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.
3. $\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \mid |x_i - x_j| > \frac{1}{n}$.
4. Supposons que la négation écrite en 3. soit vraie.

$$\text{Alors: } |x_0 - x_1| > \frac{1}{n}$$

$$|x_1 - x_2| > \frac{1}{n}$$

$$|x_i - x_{i+1}| > \frac{1}{n} \quad \forall i \text{ de } 0 \text{ à } n-1.$$

...

$$|x_{n-1} - x_n| > \frac{1}{n}$$

Sommant ces n inégalités membre à membre: $\sum_{i=0}^{n-1} |x_i - x_{i+1}| > 1$.

Comme la suite (x_i) est croissante: $|x_i - x_{i+1}| = x_{i+1} - x_i$, et la somme
de gauche est $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0$. Cette quantité est la distance
entre deux réels de $[0; 1]$: elle ne peut être > 1 .

Ainsi la négation de (P) est fausse et (P) est vraie.

Exercice 25. 1. Si Alice était menteuse, sa déclaration serait fausse, et
Alice et Bob seraient sincères! Contradiction: Alice est sincère et donc
Bob est menteur.

2. Si Chloé était menteuse, sa déclaration serait fausse : elle serait sincère et Denis menteur ! Contradiction : Chloé est sincère. Sa déclaration est vraie : Denis est donc sincère.

3. Supposons que Gaspard soit sincère : ils seraient tous menteurs ! Contradiction. Ainsi Gaspard est menteur : il y a au moins un sincère parmi eux.

Supposons maintenant que Belchior soit menteur : il y aurait au moins deux menteurs parmi eux (lui et Gaspard).

Donc Balthazar est le sincère des trois. Mais alors la déclaration de Belchior est vraie et donc Belchior est sincère.

Contradiction : Belchior est ~~menteur~~ sincère, sa déclaration est vraie : il est le seul sincère et donc Balthazar est un menteur.

- Exercice 26 -
1. on peut en effet mettre la fraction sous forme irréductible.
 2. $p^2 = 2q^2$ et donc si p était impair, $p = 2k+1$, k entier, $p^2 = 4k(k+1)+1$ serait impair. p^2 serait donc simultanément impair et pair ! Ainsi, p est pair.
 3. Donc $p = 2l$, pour un l entier et donc $p^2 = 4l^2 = 2q^2$. D'où $q^2 = 2l^2$ et, comme en 2., q est pair.
 4. p et q auraient donc 2 comme diviseur commun : c'est impossible, puisqu'ils étaient censés premiers entre eux.

Exercice 27.

$$\frac{3^{15}}{15!} / \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \text{ comme on le vérifie à la calculatrice.}$$

$$P(n) : " \frac{3^n}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n " \quad P(15) \text{ est vraie.}$$

alors. Si $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$

$$\frac{3^n}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et donc } \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq \underbrace{\frac{3}{n+1}}_{\leq \frac{3}{16} < \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 28 - 1. Soit n un entier ≥ 3 . Si $2^n > n^2$, alors

$$\text{Or, } 2^{n+1} > 2n^2 \text{ et } 2^{n+1} > 2n^2. \text{ Or, } 2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 > 0 \text{ si } n \geq 3 \text{ puisque } 3 > 1 + \sqrt{2}.$$

Ainsi : $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$: P_{n+1} est vraie.

2. P_n est vraie pour $n=0, 1$ et tout entier ≥ 5 .

Exercice 29. Si $n=1$, $\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = -1$.

$$\frac{(-1)(2 \cdot 1 + 1) - 1}{4} = -1$$

Supposons que $\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(2n+1) - 1}{4}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1} (n+1) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (4(n+1) - (2n+1) - 1)}{4} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} (2(n+1)+1) - 1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 30. 1. Soit n un entier. Supposons que $9 \mid (10^n - 1)$. On en déduit

que $10^{n+1} - 1 = \underbrace{10(10^n - 1)}_{\text{divisible par 9}} + 9$ est aussi divisible par 9.

Ainsi $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. De même, si $9 \mid (10^n + 1)$, alors

$10^{n+1} + 1 = \underbrace{10(10^n + 1)}_{\text{divisible par 9}} - 9$ est aussi divisible par 9.

Ainsi $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.

2. Si $n=0$, alors $10^0 - 1$ vaut 0 et donc P_0 est vraie. Par le principe de récurrence, et le 1., P_n est vraie pour tout entier.

Mais Q_n n'est vraie pour aucun entier car $10 \equiv 1 (9)$
 $(\forall n) \quad 10^n \equiv 1 (9)$
 $10^n + 1 \equiv 2 (9)$.

Exercice 31. 1. $A \cap B = \{4, 5\}$. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\bigcup_{\mathbb{N}} A = \{0, 1\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 6\}.$$

$$\bigcap_{\mathbb{R}} A =]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; 4[\cup]4; 5[\cup]5; \infty[.$$

$$\bigcap_{\mathbb{N}} B = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 7\} \text{ et } \bigcap_{A \cup B} A = \{6\}.$$

$$2. \quad I \cap J = [2; 3]. \quad \bigcap_{\mathbb{R}} I =]-\infty; 1[\cup]3; \infty[.$$

$$I \cup J = [1; 4]. \quad \bigcap_{\mathbb{R}} J =]-\infty; 2[\cup]4; \infty[.$$

$$\bigcap_{\mathbb{R}} (I \cup J) =]-\infty; 1[\cup]4; \infty[.$$

Exercice 32. Il s'agit simplement d'une application du principe de contradi-

position : $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$.

Exercice 33. Soit x un élément de B . De deux choses l'une :

(8)

• $x \in A$ ou $x \notin A$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in A \cap C$ (puisque $A \cap B \subset A \cap C$). Mais alors $x \in C$.

Si $x \notin A$, il reste néanmoins que $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cup C$ (puisque $A \cup B \subset A \cup C$). Mais alors x appartient nécessairement à C .

Ainsi $B \subset C$.

Exercice 34. Oui, c'est très facile. Si l'on veut jouer au c..., il suffit de prendre $A = B = C = \emptyset$. Si l'on admet un petit effort (!), $A = B = C =$ n'importe quel sous-ensemble de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ convient.

Exercice 35. $\bigcap_E \left(\bigcap_E A_1 \cup \left(\bigcap_E A_2 \cap \bigcap_E A_3 \right) \right) = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \bigcap_E A_2) = A_1 \cap (A_2 \cup \bigcap_E A_2) = A_1 \cap E = A_1.$$

Exercice 36. 1. $\{0, 1, 2, 3\}$.

2. $\{0, 6, 24\}$.

Exercice 37. $\{2p+1, p \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des entiers impairs ≥ 3 .

L'ensemble des entiers multiples de 6 est $\{n = 6k, k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 38. Car $0 = 1^2 - 1$.

Exercice 39. 1. $A \subset B$.

2. $A \cap B \neq \emptyset$

3. $A \cup B = E$

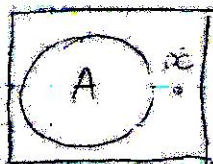
4. Passons à la négation de cette propriété, c-à-d à :

$$\forall x \in E, P(x) \text{ et } \neg Q(x).$$

C-à-d $A \cap \bigcap_E B = E$. C-à-d $A = E$ et $\bigcap_E B = E$. C-à-d $A = E$ et $B = \emptyset$.

Revenant à la proposition initiale : $A \neq E$ ~~ou~~ $B \neq \emptyset$.

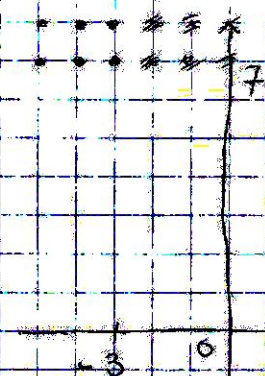
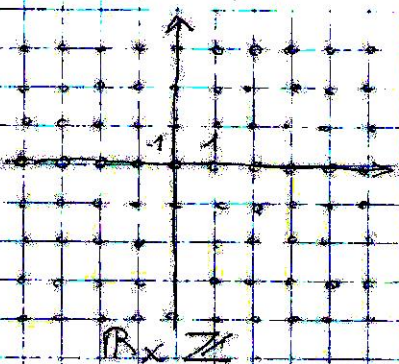
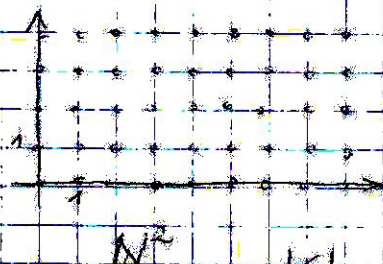
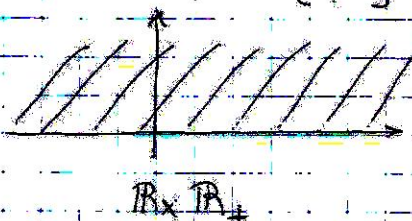
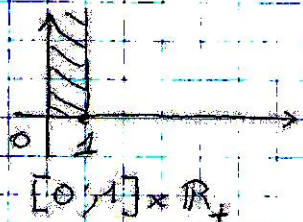
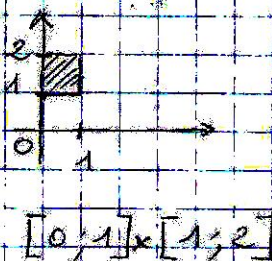
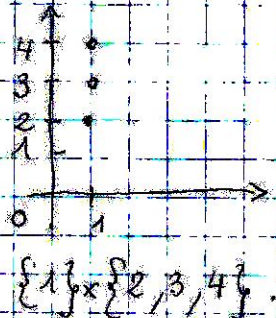
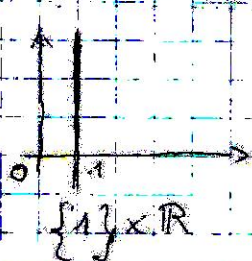
Un petit dessin permettra peut-être de saisir l'affaire :



Pour x , $P(x)$ est fausse,
donc l'implication
 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie.

Pour x , $Q(x)$ est vraie,
donc l'implication
 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est également vraie.

Exercice 40.



Exercice 41.

1. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } 3 \leq y \leq 3,5\}$ et $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-2| \leq 0,2 \text{ et } |y+1| \leq 0,1\}$

Exercice 42. Si $E \neq A$, alors 1, 2, 3, 4 sont vraies

Si $E \neq B$, alors 1, 3, sont vraies

Si $E = C$, alors 1, 2, sont vraies.

La négation demandée est : $\exists x \in [2, 5], \forall y \in [0, 5], (x, y) \notin A$
Elle est fausse.

Exercice 43. 1. $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$ 2. $\sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ 3. $\sum_{k=0}^{49} \frac{1}{2k+1}$ (10)

Exercice 44. 1. Pour $n=1$, $(x_1 - a)^2 = x_1^2 - 2ax_1 + a^2$, identité remarquable connue. Pour $n=2$, $(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2a(x_1 + x_2) + 2a^2$, somme de l'identité remarquable pour x_1 et pour x_2 puis regroupement des termes semblables.

Même démonstration pour un entier n quelconque. On alors on écrit :

$$\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2ax_k + a^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n (-2ax_k) + \sum_{k=1}^n a^2$$

$$\sum_{k=1}^n a^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2a \sum_{k=1}^n x_k + na^2.$$

n termes $\times$ par $x = x^2$.

2. Faisons $a = m$ dans l'équité du 1. On obtient :

$$\sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2m \sum_{k=1}^n x_k + nm^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - n \cdot m^2.$$

Exercice 45. 1. On obtient :

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 - \sum_{i=1}^{100} i = 100^3 - 100 = -263$$

2. On obtient $\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^{n+3} i^2 = -((n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2)$

3. ~~$\sum_{i=1}^m i^2 - \sum_{i=1}^{m+1} i^2$~~ On obtient : $m - (2m+1 + 2m+2)$,
càd $-3(m+1)$.

Exercice 46. Je suppose que l'énoncé veut dire $\forall a, \forall b, \forall a_i$ réels, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Avec cette acception, on constate que subs (b) et c) sont vrais. En effet
 $\sum_{i=1}^n (1+a_i) = n + \sum_{i=1}^n a_i$ et $1^0 + 2^0 = 5 \neq (1+2)^0 = 9$.

Exercice 47. Card $(E \cup F \cup G) = \text{Card}((E \cup F) \cup G) = \text{Card}(E \cup F) + \text{Card} G - \text{Card}((E \cup F) \cap G) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F) + \text{Card} G - \text{Card}((E \cap G) \cup (F \cap G)) = \text{Card} E + \text{Card} F + \text{Card} G - \text{Card}(E \cap F) - (\text{Card}(E \cap G) + \text{Card}(F \cap G) - \text{Card}((E \cap G) \cap (F \cap G)))$

$$\text{Card } E + \text{Card } F + \text{Card } G - \text{Card}(E \cap F) - \text{Card}(F \cap G) - \dots \quad (11)$$

$$\dots \text{Card}(G \cap E) + \text{Card}(E \cap F \cap G)$$

Exercice 48. 1. $f(x) = (x+1)^m = \sum_{k=0}^m x^k \binom{m}{k}$.

2. Il suffit de faire $x=1$ puis $x=-1$.

3. On peut déduire de la première égalité que le nombre de parties de E est 2^m .

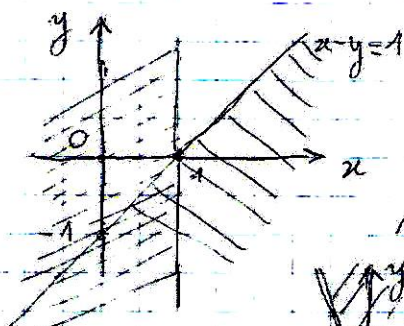
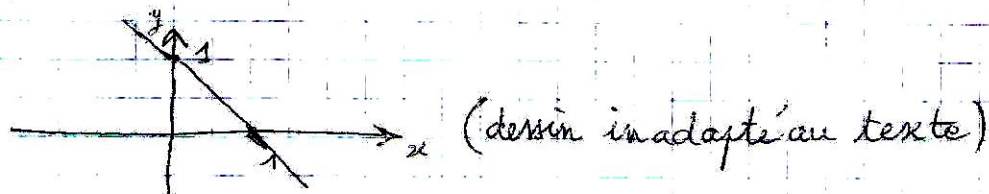
Exercice 49. 1. $p_2\left(\binom{n}{p}\right) = p \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = \dots$
 $\dots = \frac{n(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = n \binom{n-1}{p-1}$. On en déduit :

$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$
 et donc $= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

2. $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$ mais aussi $\sum_{k=1}^m k x^{k-1} \binom{n}{k}$. Il ne reste plus qu'à faire $x=1$ pour retrouver le résultat de 1.

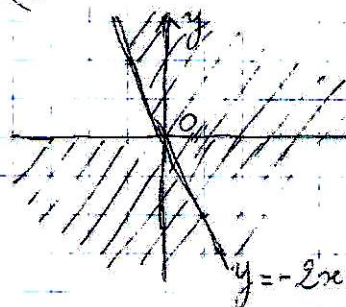
Exercice 50

(1)



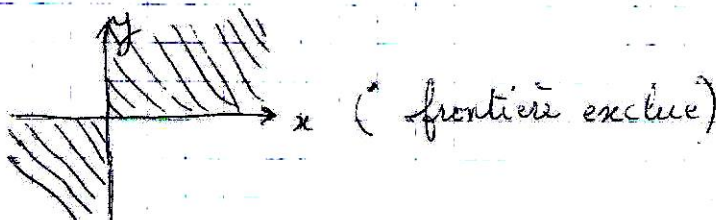
(La partie non hachurée est la "bonne", demi-droite verticale comprise mais 1/2 droite oblique exclue).

(2)



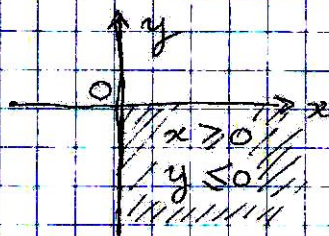
(là encore, la partie non hachurée est la bonne, frontière exclue).

(3)



Exercice 51.

1.



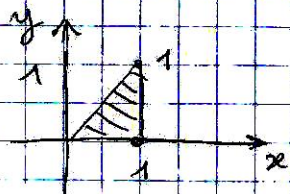
2.



$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1.$$

ou
 $0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1$
 (si l'on exclut le bord)

3.



Si l'on exclut le bord :

$$0 < x < 1, y > 0, \text{ et } x > y.$$

Que l'on peut simplifier en $0 < y < x < 1$.

Exercice 52.

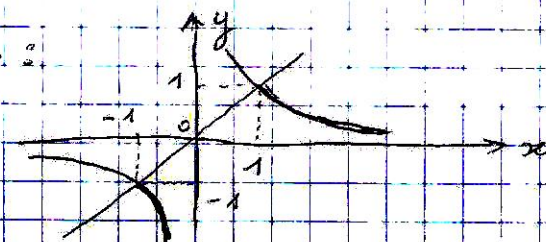
1.

$$\frac{1}{x} \leq x. \text{ Si } x < 0, 1 \geq x^2, \text{ c\`ad } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\text{Si } x > 0, 1 \leq x^2, \text{ c\`ad } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1$$

Au total, $-1 \leq x < 0$ ou $x \geq 1$.

(on retrouve ceci gr\^ace au dessin :



$$2. (x^2 - 1)^2 > 1 \quad (x^2 - 1)^2 - 1 > 0 \quad (x^2 - 1 + 1)(x^2 - 1 - 1) > 0$$

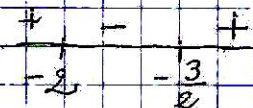
$$x^2(x^2 - 2) > 0$$

$$x \neq 0 \text{ et } x^2 > 2.$$

Au total : $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$.

$$3. \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4} \geq 0. \quad \frac{2(x - 2)(x + \frac{3}{2})}{(x - 2)(x + 2)} \geq 0. \quad \frac{x + 3/2}{x + 2} \geq 0.$$

Au total : $x < -2$ ou $x \geq -\frac{3}{2}$

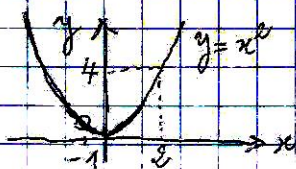


Exercice 53.

1. De $-5 < x < 1$ on peut simplement d\`eduire que $x^2 < 25$

2. De $x \leq 2$ et $y < -1$ on peut d\`eduire que

$$x + y < 1,$$



rien pour x^2 (si a m\`eme que $x^2 \geq 0$!),
 que $y^2 > 1$ et enfin rien pour xy :

ait en effet une valeur de t .

• Si $t=0$: $t = 0 \cdot (-2)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \leq 2 \quad -2 < -1$

• Si $t=-1$: $t = (1/2)(-2)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $1/2 \leq 2 \quad -2 < -1$

• Si $t > 0$: $t = (-\frac{2t}{3})(-\frac{3}{2})$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $-\frac{2t}{3} < 0 \leq 2 \quad -\frac{3}{2} < -1$

• Si $t < -1$: $t = 1 \cdot t$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $1 \leq 2 \quad t < -1$

• Si $-1 < t < 0$: $t = t^2 \cdot \frac{1}{t}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $t^2 < 1 \leq 2 \quad \frac{1}{t} < -1$

3. De $-2 \leq x \leq 3$ et $-7 \leq y \leq -5$, on déduit d'abord que $x \geq y$

Puis que $x^2 \leq 9$ et $25 \leq y^2 \leq 49$, par conséquent $y^2 \geq x^2$.

Enfin pour $\frac{y^2}{y^2 - x^2}$, cela vaut $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{y^2}}$.

Comme $\begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 9 \\ \frac{1}{49} \leq \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{25} \end{cases}$, on a : $0 \leq \frac{x^2}{y^2} \leq \frac{9}{25}$

Ainsi, $\frac{1}{1-0} \leq \frac{y^2}{y^2 - x^2} \leq \frac{1}{1 - \frac{9}{25}}$, c'est-à-dire $1 \leq \frac{y^2}{y^2 - x^2} \leq \frac{25}{16}$.

Exercice 54. 1. $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0$.

L'égalité équivaut donc à $x=y$.

2. En fait, $a \leq g \leq m \leq b$. En effet : $0 \leq a \leq b$

car la fonction racine carrée est croissante. $\begin{cases} a^2 \leq ab \iff ab \leq b^2 \\ a = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{ab} = g \quad g = \sqrt{ab} \leq \sqrt{b^2} = b. \end{cases}$

$$m - b = \frac{a-b}{2} \leq 0 \text{ car } a - b \leq 0.$$

$$\text{et } g - m = \sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \quad (14)$$

3. Il reste à montrer que $a \leq h \leq g$. Or :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ 0 &\leq a \leq b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{h} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \text{ et donc } h \geq a.$$

$$\text{Puis } h - g = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} - \sqrt{ab},$$

$$h - g = \frac{1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}. \text{ Or, } \forall t > 0, \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq 2.$$

Il suffit de poser $t = \sqrt{\frac{a}{b}}$ pour obtenir $h \leq g$.

Exercice 55. $E(1,5) = 1 = E(1)$ et $E(-0,5) = -1$

1. Soit x un "réel". $E(x)$ est l'unique entier tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

$$\text{On en déduit : } \underbrace{E(x) + 1}_{\text{entier}} \leq x + 1 < (E(x) + 1) + 1.$$

$$\text{Ainsi : } E(x+1) = E(x) + 1.$$

2. Soit x et y deux "réels". On sait que $E(x) \leq x < E(x) + 1$

$$E(y) \leq y < E(y) + 1.$$

$$\text{donc } E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$$

$$\text{Or : } -E(x+y) - 1 < -(x+y) \leq -E(x+y)$$

En additionnant membre à membre, on obtient en fait

$$E(x) + E(y) - E(x+y) - 1 < 0, \text{ c'est-à-dire}$$

$$E(x) + E(y) < E(x+y) + 1.$$

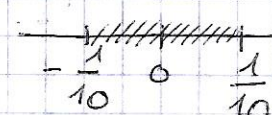
Mais il s'agit d'entiers, et donc $E(x) + E(y) \leq E(x+y)$.

3. Bien sûr que non ! Ainsi $E(2, \frac{1}{2}) = 1$ mais $2E(\frac{1}{2}) = 0$.

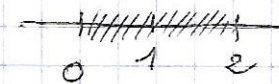
Exercice 56.

valeur absolue	distance	intervalle	encadrement
$ x-3 \leq 1$	$d(x;3) \leq 1$	$x \in [2;4]$	$2 \leq x \leq 4$
$ x+4 \leq 2$	$d(x;-4) \leq 2$	$x \in [-6;-2]$	$-6 \leq x \leq -2$
$ x \leq 2$	$d(x;0) \leq 2$	$x \in [-2;2]$	$-2 \leq x \leq 2$
$ x-8 \leq 2$	$d(x;8) \leq 2$	$x \in [6;10]$	$6 \leq x \leq 10$

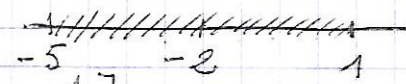
Exercice 57. 1. $-\frac{1}{10} \leq x \leq \frac{1}{10}$; $I_1 = [-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}]$



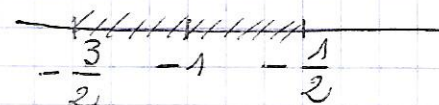
2. $0 \leq x \leq 2$; $I_2 = [0;2]$



3. $-5 \leq x \leq 1$; $I_3 = [-5;1]$



4. $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$; $I_4 = [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$



5. $|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5$.

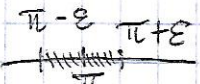
$|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3$.




La conjonction mène à $x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5$. $I_5 =]-\infty; 1] \cup [5; \infty[$.

 : on voit qu'effectivement $|x-3| \geq 2 \Rightarrow |x-2| \geq 1$

6. $|x-\pi| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \pi-\varepsilon \leq x \leq \pi+\varepsilon$. $I_6 = [\pi-\varepsilon; \pi+\varepsilon]$



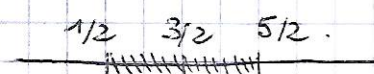
7. $|x-a| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a-\frac{1}{2} \leq x \leq a+\frac{1}{2}$.

$I_7 = [a-\frac{1}{2}; a+\frac{1}{2}]$.



8. $|2x-3| \leq 2 \Leftrightarrow |x-\frac{3}{2}| \leq 1$, c-à-d $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

$I_8 = [\frac{1}{2}; \frac{5}{2}]$



Exercice 58. 1. $|x| \leq 2$.

2. $|x-\frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$.

3. $|x| < \varepsilon$.

Exercice 59. a) $x = 6 \text{ ou } x = -4$. b) $-5 < x < -1$.