

du texte. Or, f sera continue en 1 si et seulement si :

(46)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} \quad (= \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x)) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + bx + 1),$$

$$\text{càd } a + b + 1 = 1, \text{ soit } a = -b.$$

Et f sera dérivable en 1 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ existe, } \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ existe, et ces deux limites}$$

$$\text{se valent. Or : } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(ax^2 + bx + 1) - 1}{x - 1} = \frac{ax^2 + bx}{x - 1} \stackrel{(*)}{=} \frac{ax(x - 1)}{x - 1} = ax$$

tend vers a si $x \rightarrow 1$.

Ainsi les valeurs de a et b cherchées valent :

$$a = -b \text{ et } a = \frac{1}{2}. \text{ C\`ad le seul couple convenable est}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

(*) f dérivable en 1 $\Rightarrow f$ continue en 1 et donc $a = -b$.

Exercice 123. 1. Il suffit de rappeler que $(\forall \theta) |\sin \theta| \leq 1$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$. Comme $|f(x)| \leq x^2$, on a aussi :

$$\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \text{ et donc la continuit\`e de } f \text{ en } 0.$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et par les théorèmes généraux sur les opérations sur les fonctions dérivables (page 71). La valeur de $f'(x)$ si $x \neq 0$ est $(x^2)' \sin(\frac{1}{x}) + x^2 (\frac{1}{x})' \cos(\frac{1}{x})$: c'est bien la valeur annoncée par le texte.

$$3. \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est major\`e en valeur absolue par } |x|.$$

$$\text{Ainsi : } \forall \varepsilon > 0, 0 < |x| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| < \varepsilon.$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ existe et est nulle. : } f'(0) = 0.$$

4. Le fait que $\cos(\frac{1}{x})$ n'admette pas de limite en 0 est expliqu\`e en

$$\text{page 41 : } x_k = \frac{1}{2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \cos\left(\frac{1}{x_k}\right) = 1 \quad (\forall k)$$

mais $x_{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ et $\cos \frac{1}{x_{\frac{1}{k}}} = 0 \quad \forall k$.

(47)

$f'(x)$ n'admet donc pas de limite en 0 car sinon, $\cos(\frac{1}{x})$ en admettrait une, qui ^{lui} serait opposée (puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(\frac{1}{x}) = 0$).

$$\forall x, |2x \sin(\frac{1}{x})| \leq 2|x|.$$

Exercice 124. f est dérivable sur $] -\infty; -2\sqrt{3}[\cup] 2\sqrt{3}; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-12}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-12}}; \quad g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = 3\cos^2 x (-\sin^3 x) + 2\sin x (\cos^4 x).$$

h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ($x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$).

$$\text{et } h'(x) = \frac{(-20x^3)(x^3 - x^2 + x - 1) - (3 - 5x^4)(3x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-5x^6 + 10x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 9x^2 + 6x - 3}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \quad (!).$$

Enfin k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ et $k'(x) = 5(\tan x)^4(1 + \tan^2 x)$.

Exercice 125. 1. $f(x) = f(-x) \quad (\forall x)$
 $\Downarrow$ en dérivant les 2 membres

$$f'(x) = -f'(-x) \quad (\forall x).$$

2. $f''(x) = -f''(-x) \quad (\forall x)$ entraîne $(x=0) \quad f(0) = -f(0)$ et donc $f(0) = 0$.

Et puis en dérivant $f'(x) = -(-f'(-x)) = f'(-x) \quad (\forall x)$.

Exercice 126.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = (\sin(x^2))'(0) = 2x \cos(x^2) \big|_{x=0} \text{ c\`ad } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = (\sqrt{x+1})'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = (\sin \pi x)'(1) = \pi \cos(\pi x) \big|_{x=1} \text{ c\`ad } -\pi.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \stackrel{\sin \pi = 0}{=} (e^{2x})'(0) = 2e^{2x} \big|_{x=0} \text{ c\`ad } 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} - e}{x-1} = (e^x)'(1) = e.$$

Exercice 127 1. f est dérivable donc continue de I sur $f(I)$

$\forall x \in I$ $f'(x) = - \frac{(\tan x) + x(1 + \tan^2 x)}{(x \tan x)^2}$. Comme $\tan x > 0$

$\forall x \in I$, $f'(x) < 0$ sur I : f est donc strictement décroissante.

Elle réalise donc une bijection de I sur $J = f(I) =]\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f; \lim_{x \rightarrow 0} f[$,
càd $]0; +\infty[$ ($\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ et $\tan 0 = 0$).

2. On sait par théorème que $g = f^{-1}$ est bien continue sur J . Et quelle sera dérivable en tout point $f(x)$ de J où $f'(x) \neq 0$. Or

$f'(x)$ ne peut s'annuler sur I car $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{(\tan x)}_{>0} + \underbrace{x}_{>0} \underbrace{(1 + \tan^2 x)}_{>0} = 0, \\ x \in I \end{cases}$
ce qui est donc impossible.

Ainsi, $g = f^{-1}$ est bien dérivable sur J .

Exercice 128

$(1 + \frac{1}{2x})^x = \exp(x \ln(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x}))$.

Or: $x \ln(1 + \frac{1}{2x}) = \frac{1}{2} \frac{\ln(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x})}{\frac{1}{2} \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ puisque
(et donc $\frac{1}{x} \rightarrow 0$)

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Ainsi la première limite est $\sqrt{e}$.

$\frac{5^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} (5^x)'(0) = (\ln 5) 5^0$ càd $\ln 5$.

$x(3^{1/x} - 1) = \frac{3^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{3^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty \text{ càd } x \rightarrow 0} (3^x)'(0),$
càd $(\ln 3) 3^0 = \ln 3$.

$(1 + \frac{x}{x})^x = \exp(x \ln(1 + \frac{x}{x})) = \exp(\underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{x}{x})}{\frac{x}{x}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty, \text{ càd } \frac{x}{x} \rightarrow 0} 1})$
tend vers e^1 quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 129

1. Nous définissons ici x^x comme étant $e^{x \ln x}$ et donc $D(f)$ comme $\mathbb{R}_+^*$. f est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \left(\frac{x}{x} + \ln x\right) f(x)$, c'est-à-dire $(1 + \ln x) f(x)$. D'où le tableau des variations de f .

x	0	$1/e$	$+\infty$
$\text{sgn } f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$e^{-1/e}$	$+\infty$

($x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$)

2. D'après les variations de f : $x^x = m$ ~~présente~~ $\begin{cases} \text{si } m < e^{-1/e}, \text{ pas de solution} \\ \text{si } m = e^{-1/e}, \text{ une solution} \\ \text{si } e^{-1/e} < m < 1, \text{ deux solutions} \\ \text{et si } m \geq 1, \text{ une solution.} \end{cases}$

Exercice 130 (ces fonctions seront ici rebaptisées f_1 à f_7).

f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_1(x) = (\cos x)(-\sin(\sin x)) f_1(x)$.

f_2 est dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi; \pi + 2k\pi[$ et $f'_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

f_3 est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $f'_3(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

f_4 est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et $f'_4(x) = \frac{3}{2} (3x^2) \sqrt{x^3 + 1}$.

f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'_5(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x + 1) - e^x \sqrt{x}}{(e^x + 1)^2}$.

f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_6(x) = (3x^2 - 2) f_6(x)$.

f_7 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_7(x) = (-a \cos \omega x + b \sin \omega x) e^{cx} + c(a \cos \omega x + b \sin \omega x) e^{cx}$.

Exercice 131

$$\sqrt{x} - x = -x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

$$\text{donc } e^{\sqrt{x} - x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-\infty} = 0.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{\ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

$$\frac{x - 2 \ln x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \frac{1 - 2 \frac{\ln x}{x}}{1 - e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \text{tend vers } 1 - 0 = 1 \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Exercice 132.

1. $\sin$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ donc la limite existe et vaut $(\sin)'(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable en $\frac{1}{2}$ donc la limite existe et vaut $(2x - 1)'(\frac{1}{2}) = 2(x - \frac{1}{2})$

$$\frac{1}{2} (e^{2x})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} 2e^{2 \cdot \frac{1}{2}} = e.$$

3.
$$\frac{\sqrt{x^2+3} - x + 2}{x} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - x + 2}{x} = \frac{-x}{x} \left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{1 - \frac{2}{x}}_{\rightarrow 2} \right)$$

Ainsi la limite demandée vaut -2 .

4. Cette fois,
$$\frac{\sqrt{x^2+3} - x + 2}{x} = \frac{(x^2+3) - (x-2)^2}{x \sqrt{x^2+3} + (x-2)}$$

$$= \frac{4x-1}{x} \text{ qui tend vers } 4 \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3} + (x-2)} \text{ qui tend vers } 0 \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

[Ou, plus simplement, quoique ...]

Exercice 133.

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ existe car $\ln$ est dérivable en 1 et vaut $(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ existe car $x \mapsto e^{x^2}$ est dérivable en 0 et vaut $(e^{x^2})'(0) = 2x \cdot 0 \cdot e^0 = 0$.

• $x(\ln(x+1) - \ln x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ tend vers 1 quand $x \rightarrow +\infty$,
 tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$

je rappelle que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

• $\frac{x^{1/5} - 1}{x^4 - 1} = \frac{x^{1/5} - 1}{x - 1} \text{ tend vers } \frac{(x^{1/5})'(1)}{(x^4)'(1)} \text{ c\`ad } \frac{\frac{1}{5} 1^{-4/5}}{4 \cdot 1^3} \text{ c\`ad } \frac{1}{20} \text{ quand } x \text{ tend vers } 1.$

• Enfin, $x \frac{1}{1+2\ln x} = \exp\left(\frac{\ln x}{1+2\ln x}\right) = \exp\left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{\ln x} + 2}}{\frac{1}{\ln x} + 2}\right)$ tend vers $\sqrt{e}$
 quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 134. 1. g définis $f(x)$ comme étant $\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R}_+^*$. [remarque en passant: $(-1)^{(-1)}$ existe et vaut -1].

Lorsque $x \rightarrow 0, x > 0$, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x)$ existe et vaut $e^{-\infty} = 0$. Pour le reste, f est dérivable sur son domaine et

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \underbrace{f(x)}_{>0} \quad (\forall x > 0).$$

x	0	e	$+\infty$
$\text{sgn } f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 1 = e^0$

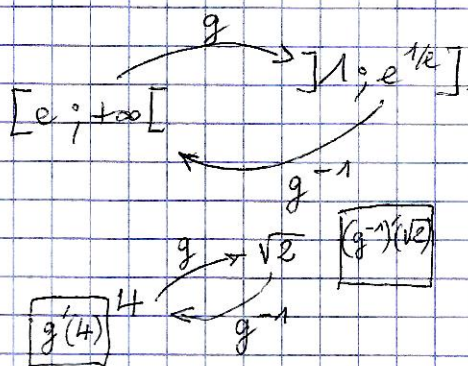
$$1 = e^0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right).$$

2. On constate aussitôt que $2^{1/e} = \sqrt{2}$ comme $4^{1/4} = (2^2)^{1/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$.

Voilà donc déjà deux solutions à l'équation $f(x) = \sqrt{2}$. Mais le tableau de variations indique qu'il ne saurait y en avoir plus de deux. Ce sont donc les bonnes : 2 et 4 (l'une $< e$, l'autre $> e$).

3. g est dérivable donc continue et strictement décroissante (car $g'(x) = f'(x) < 0$ si $x > e$) donc elle est bijective de $[e; +\infty[$ sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} g; g(e)]$ c.à.d. $]1; e^{1/e}]$.

$$g^{-1}(\sqrt{2}) = 4 \quad \text{car } g(4) = f(4) = \sqrt{2}. \quad (4 > e \in \mathcal{D}(g)).$$



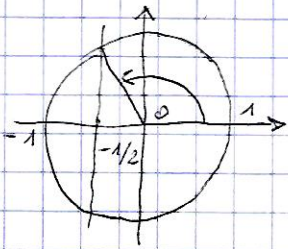
Quant à $(g^{-1})'(\sqrt{2})$, il vaut $\frac{1}{g'(4)}$, c.à.d. :

$$\frac{1}{f'(4)} \quad \text{c.à.d.} \quad \frac{4^2}{1 - \ln 4} = \frac{1}{f(4)} = \frac{1}{1 - 2 \ln 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

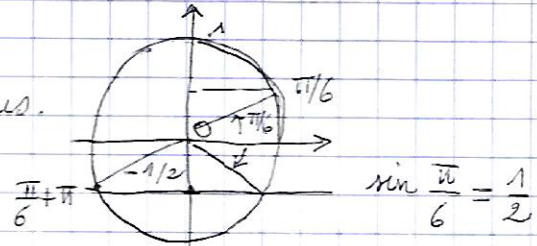
Exercice 135. 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynômiale et $f'(x) = -12x^2 + 3$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\text{sgn } f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow \infty$	$\searrow -\frac{1}{2}$	$\nearrow \frac{3}{2}$	$\searrow -\infty$	

2.



, et c'est le cosinus.



$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ pour un } k \text{ entier ou} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi \text{ pour un } k \text{ entier.} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} \sin(3x) = -\frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2\pi \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ ou } (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \text{ pour un } k \text{ entier.} \end{cases}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{3}(2k\pi - \frac{\pi}{6}) \leq 2\pi \\ 0 \leq \frac{1}{3}((2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}) \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{37}{12} \\ -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{29}{12} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{3}((2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}) \leq 2\pi \\ 0 \leq \frac{1}{3}((2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}) \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{37}{12} \\ -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{29}{12} \end{cases} \quad (2)$$

Ainsi, pour (1), les seules valeurs de k convenables sont 1, 2 et 3 ; pour (2), 0, 1, 2.

Au total, on obtient les 6 solutions :

$$\frac{1}{3}(2\pi - \frac{\pi}{6}) ; \frac{1}{3}(4\pi - \frac{\pi}{6}) ; \frac{1}{3}(6\pi - \frac{\pi}{6}) ; \frac{1}{3}(\pi + \frac{\pi}{6}) ; \frac{1}{3}(3\pi + \frac{\pi}{6}) \text{ et } \frac{1}{3}(5\pi + \frac{\pi}{6}).$$

Soit au total, les éléments de l'ensemble E

$$E = \left\{ \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{31\pi}{18}, \frac{35\pi}{18} \right\}.$$

3. Il suffit d'écrire $\sin 3x = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}$ ou plutôt d'écrire $e^{3ix} = (e^{ix})^3 =$

$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos(3x) + i \sin(3x)$. Les parties "imaginaires" des deux membres se valent : $\sin 3x = \text{Im}((\cos x + i \sin x)^3) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x =$

$$3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

4. $f(x) = 0$? On constate d'abord que cette équation a trois solutions (cf tableau du 1.), l'une située dans $]-\infty; -\frac{1}{2}]$, l'autre dans $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, la troisième dans $[\frac{1}{2}; \infty[$. De plus, $f(-1) = \frac{3}{2}$ et $f(1) = -\frac{1}{2}$; par conséquent, les trois solutions sont dans $]-1; 1[$. On peut donc les chercher sous la forme

$\sin \theta$, où $\theta \in [0; 2\pi[$. Alors on doit avoir $f(\sin \theta) = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta + \frac{1}{2}$ (53)

$= 0$, c'ad: $\sin(3\theta) = -\frac{1}{2}$. On a vu plus haut que ceci équivaut à $\theta \in E$. Résumons:

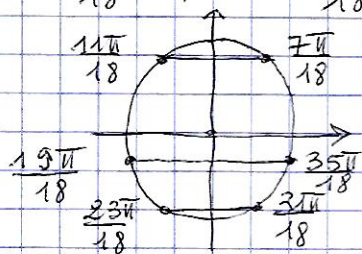
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sin \theta, \text{ où } \theta \in E.$$

On obtient donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sin \frac{7\pi}{18}$ ou $\sin \frac{11\pi}{18}$ ou $\sin \frac{19\pi}{18}$ ou $\sin \frac{23\pi}{18}$

ou $\sin \frac{3\pi}{18}$ ou $\sin \frac{35\pi}{18}$. Mais $\sin \frac{11\pi}{18} = \sin(\pi - \frac{11\pi}{18}) = \sin \frac{7\pi}{18}$;

$\sin \frac{19\pi}{18} = \sin(\pi + \frac{\pi}{18}) = -\sin \frac{\pi}{18}$ et $\sin \frac{35\pi}{18} = \sin(\frac{35\pi}{18} - 2\pi) = \sin(\frac{-\pi}{18}) = -\sin \frac{\pi}{18}$;

$\sin \frac{23\pi}{18} = \sin(3\pi - \frac{23\pi}{18}) = \sin(\frac{31\pi}{18})$.



Au total, les trois solutions de $f(x) = 0$ sont

$$\sin \frac{7\pi}{18}, \sin \frac{19\pi}{18} = -\sin \frac{\pi}{18} \text{ et } \sin \frac{23\pi}{18}.$$

On constate qu'effectivement $\sin \frac{7\pi}{18} \in]\frac{1}{2}; 1[$, $-\sin \frac{\pi}{18} \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et $\sin \frac{23\pi}{18} \in]-1; -\frac{1}{2}[$.

Exercice 136.

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{1 + \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} =$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos x.$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{2 \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Enfin

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2 \sin(x/2) / \cos(x/2)}{1 - \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Exercice 137

La première limite n'existe pas; en effet, $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$ et

$$\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \text{ ; or } \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}. \text{ Il y}$$

a donc deux limites, l'une à gauche de 1 (qui vaut $-\frac{\pi}{2}$) et l'autre à droite de 1 (qui vaut $\frac{\pi}{2}$).

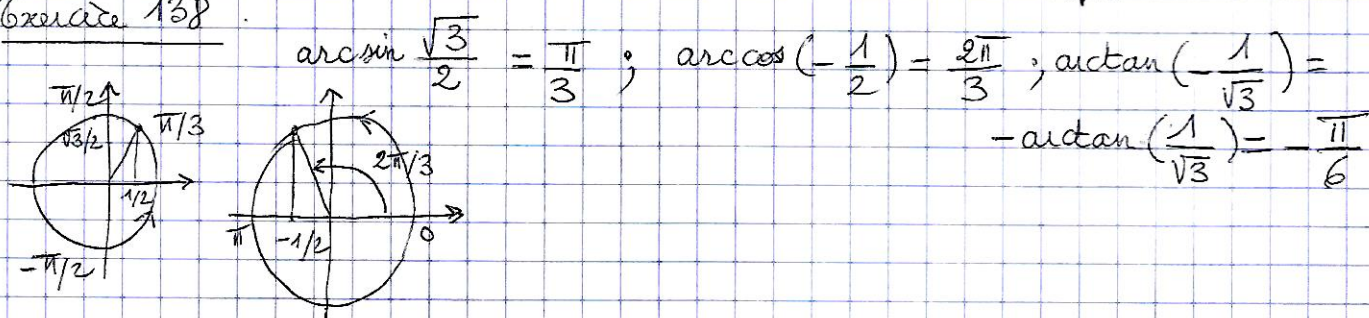
$$\frac{\arccos x - \pi/3}{4x^2 - 1} = \frac{\arccos x - \pi/3}{x - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2(2x+1)}$$

tend vers $(\arccos)'(\frac{1}{2})$ tend vers $\frac{1}{2(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)} = \frac{1}{4}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ainsi la limite demandée vaut $-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 138



$$\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{6}) = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos(\cos \frac{5\pi}{6}) = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin(\arcsin 1) = 1$$

$$\arcsin(\sin 1) = 1$$



$$\tan(\arctan 3) = 3$$

$$\arctan(\tan 3) = \arctan(\tan(3 - \pi)) = 3 - \pi$$

$\in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$\tan$ est " π -périodique"

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\tan} \mathbb{R} \\]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\xleftarrow{\arctan} \end{array}$$

$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

Exercice 139 Pour $x \in [-1; 1]$,

$\sin(\arccos x)$ doit être ≥ 0 car $\arccos x \in [0; \pi]$.

$$\text{De plus, } \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

Puis $\cos(\arcsin x)$ doit être ≥ 0 car $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et, de même:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

55

$$\text{Enfin, } \tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 140

$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$

D'abord f est définie sur $\mathbb{R}$, elle est (comme $\sin$) 2π -périodique, elle est impaire (comme $\sin$ et $\arcsin$). Puis $f(-\pi - x) = \arcsin(\sin(-\pi - x)) = \arcsin(-\sin x) = -f(x)$. ($\forall x$ bien entendu). On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

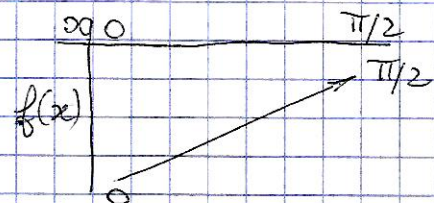
On en déduira l'étude sur $[0; \pi]$ d'abord, puis sur $[-\pi; \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$

on sait alors que la fonction $\arcsin$ n'est dérivable que sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$.

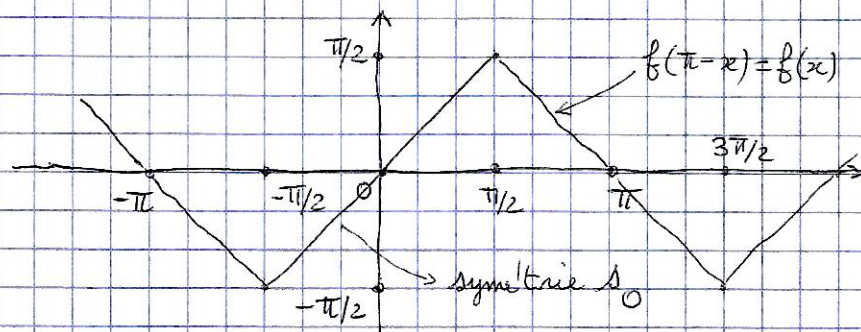
$$\text{Or } \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ x \in [0; \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}. \text{ Donc, } f \text{ n'est dérivable que sur } [0; \frac{\pi}{2}[\text{ et }] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{alors } f'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\cos x} = 1. \text{ Ainsi } f(x) = x + f(0) \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}[.$$

Mais $f(0) = 0$. En fait, $f(x) = x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ car $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.



D'où le graphe "complet" sur un peu plus d'un "intervalle-période".



Ainsi par exemple $f(x) = \pi - x$ sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. On retrouve

$$\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ de l'exercice précédent.}$$

Exercice 141.

(Il faut utiliser les fonctions)

$$\text{D'abord, } \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \text{ et}$$

$$\arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}. \text{ Ensuite:}$$

$x \mapsto \arccos(x) + \arcsin x$ est dérivable sur $] -1; 1 [$ et le nombre dérive!

de la fonction au point $x \in]-1; 1[$ est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

Ainsi la fonction est constante sur l'intervalle $] -1; 1[$. Cette valeur constante est (par exemple) la valeur prise en 0. Or :

$$\arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

CQFD.

Exercice 142. 1. $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ est définie sur $\{x \mid \sqrt{x} \in D(\arcsin)\} =$

$\{x \mid \sqrt{x} \in [-1; 1]\} = [0; 1]$. Par contre, elle n'est dérivable que sur $]0; 1[$ car

$\sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\arcsin$ n'est dérivable que sur $] -1; 1[$.

Pour h , elle est dérivable (et donc définie) sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 - 1$ et $\arctan$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ et ce $\forall x \neq 0$. Ainsi g est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

g étant impaire, ces deux constantes sont opposées. De plus, $g(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sur } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$.

Exercice 143.

1. $f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $\arctan$ est continue

sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-1/x}$ l'est sur $\mathbb{R}^*$. En outre, $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan x = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{-1/x} = e^{-\infty} = 0, \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x).$$

Ainsi, f est continue aussi en 0.

2. $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-1/x}$ l'est sur $\mathbb{R}^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En outre,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{si } x < 0, \text{ qui tend vers } (\arctan)'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \\ \frac{1}{x} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \text{ qui tend vers } 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0, \end{cases}$$

$$\text{car } \left(\frac{1}{x} = X\right) \frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{X}{e^X} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0. $f'(0) = 1$ mais $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(0) = 0$.

Exercice 144. $x \mapsto \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. On constate tout d'abord que

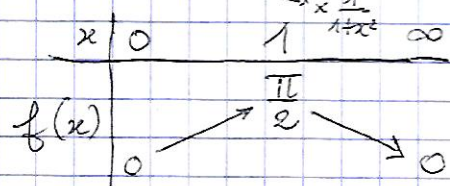
$$(*) \quad \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \quad \forall x \text{ réel}, \text{ car le signe de } \frac{2|x|}{1+x^2} - 1 \text{ est celui de}$$

$-(|x|-1)^2$, c'est négatif. Comme arcsin est définie sur $[-1; 1]$, la fonction étudiée ici est définie partout. Par contre, arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1 , ^{mais sur $] -1; 1[$,} donc la fonction ne sera pas dérivable pour les cas d'égalité de l'inégalité (*) mais partout ailleurs. Or :

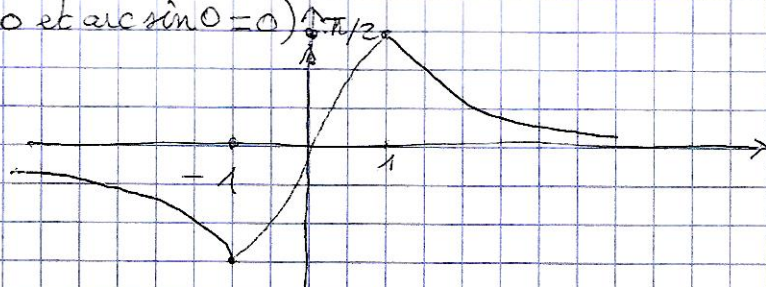
$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| = 1 \Leftrightarrow |x| = 1, \text{ c'est } x = \pm 1.$$

De plus, pour $x \neq \pm 1$: $f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}} = 2 \cdot \frac{1-x^2}{1-x^2} \cdot x$

c'est $\begin{cases} 2x & \text{si } |x| < 1 \\ -2x & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ (est impaire, au passage).



On peut faire un graphe sommaire :



Pour la comparaison avec arctan, on constate que :

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \text{ si } |x| < 1 \text{ et } f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \text{ si } |x| > 1.$$

Ainsi :

$$f'(x) = 2 (\arctan)'(x) \text{ si } |x| < 1 \text{ et } f'(x) = -2 (\arctan)'(x) \text{ si } |x| > 1$$

On en conclut que : $f(x) - 2 \arctan x = \begin{cases} \text{une constante sur } [-1; 1] \\ \text{(accolade inutile !)} \end{cases}$ et

$$f(x) + 2 \arctan x = \begin{cases} \text{une constante sur }]-\infty; -1] \\ \text{une constante sur } [1; +\infty[. \end{cases}$$

Reste à trouver ces constantes. La première est, par exemple, $f(0) - 2 \arctan 0$, c'est 0 ; la deuxième $f(-1) + 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2} + 2x \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi$ et la troisième $f(1) + 2 \arctan 1 = \pi$. Récapitulation :

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \arctan x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \pi - 2 \arctan x & \text{si } x > 1 \\ -\pi - 2 \arctan x & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Exercice 145 $f(x) = \cos(\arctan(2x+1))$.

1. $\cos$ comme $\arctan$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f aussi.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \cos(\arctan(\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1))) = \cos(\arctan(-\infty)) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f = \cos(\arctan(\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1))) = \cos(\arctan(\infty)) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Et $f(-1) = \cos(\arctan(-1)) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(\arctan(2x+1)) = \cos(\frac{\pi}{4})$.

$$\Leftrightarrow \arctan(2x+1) = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}.$$

Mais il est nécessaire que $\pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, c'à d soit

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{\pi}{2} \text{ soit } -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{\pi}{2}. \text{ Soit encore}$$

$$-\frac{1}{8} < k < \frac{3}{8} \text{ ou } -\frac{3}{8} < k < \frac{1}{8}.$$

On constate donc que seul $k=0$ convient. Par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \arctan(2x+1) = \pm \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x+1 = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}, \text{ c'à d}$$

$$x = -1 \text{ ou } x = 0.$$

3. Il suffit de remarquer que $f|_{[-\frac{1}{2}; \infty[}$ est continue et strictement monotone. Or, f est dérivable, comme $\cos$ et $\arctan$, sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) =$

$$\frac{2}{1+(2x+1)^2} (-\sin(\arctan(2x+1))).$$

> 0 sur $]-\frac{1}{2}; \infty[$
 > 0 sur $]-\frac{1}{2}; \infty[$ mais aussi $< \frac{\pi}{2}$.
 < 0 sur $]-\frac{1}{2}; \infty[$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2}; \infty[$ donc sur $[-\frac{1}{2}; \infty[$.

CQFD.

4. $-1 \xrightarrow{f} \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{g} -1$

$\boxed{\frac{f'(-1)}{g'(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$g'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{f'(-1)} = \sqrt{2}.$$

Exercice 146. $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. $\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+x}{1-x} \text{ existe} \right\}$, car $\mathcal{D}(\arctan) = \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow \infty} f$. (car $\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$ et $\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -1$ et $\arctan$ est continue en -1)

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \arctan\left(\frac{x}{0_+}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \arctan\left(\frac{x}{0_-}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

3. On peut donc prolonger f par continuité $\uparrow$ en $\tilde{f}_1$ sur $]-\infty, 1[$ en posant $\tilde{f}_1(1) = \frac{\pi}{2}$ et sur $]1, \infty[$ en posant $\tilde{f}_2(1) = -\frac{\pi}{2}$. Par

conséquent, on ne peut pas prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ car $\tilde{f}_1(1) \neq \tilde{f}_2(1)$.

4. f est dérivable car $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction rationnelle

$x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ l'est sur $\mathbb{R}$ (p. 14 de 1). Quant à $f'(x)$, $x \neq 1$, il vaut :

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{x}{(x-1)^2 + (x+1)^2}.$$

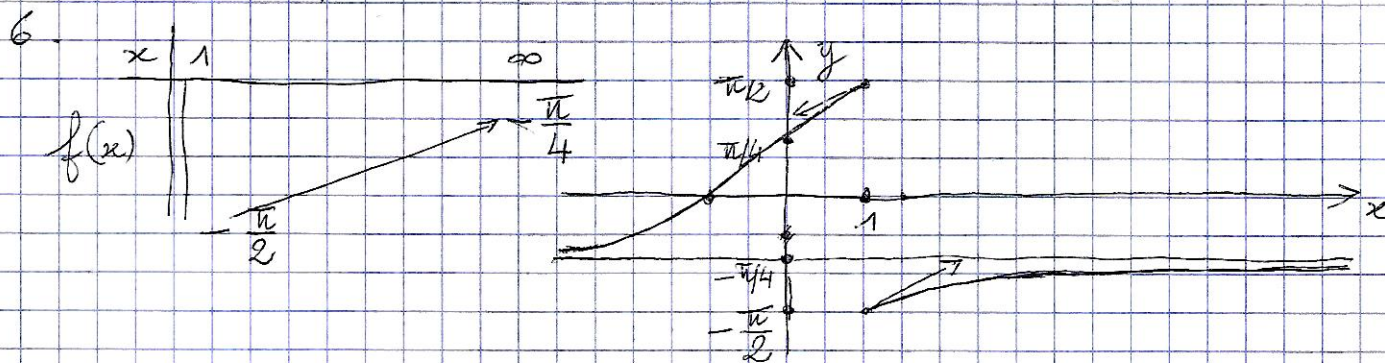
C'est-à-dire $f'(x) = \frac{x}{2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$.

5. On constate que, sur $]1, \infty[$, $f'(x) = (\arctan)'(x)$. Donc il

existe une constante C_1 telle que $\forall x > 1$, $f(x) = C_1 + \arctan x$. Pour

trouver C_1 , il suffit de comparer $\lim_{x \rightarrow \infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctan x)$ car $C_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f - \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$.

Ainsi $C_1 = -\frac{3\pi}{4}$ et si $x > 1$, $f(x) = -\frac{3\pi}{4} + \arctan x$.



(en effet, sur $]-\infty; 1[$, $f(x) = C_2 + \arctan x$; $C_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan$,
 càd $C_2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, en sorte que $f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan x$).

Remarque : $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \left(\arctan \frac{1+x}{1-x} - \frac{\pi}{2} \right)$, càd

$$\frac{1}{1-x} \arctan \frac{1-x}{1+x} \cdot X$$
 où X , qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 1$.

Or, on sait que $\frac{\arctan X}{X} \rightarrow 1$ lorsque $X \rightarrow 0$. Ainsi l'on obtient :

$$\frac{1}{1-x} \times \frac{\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{1-x}{1+x}, \text{ càd } \frac{1}{1+x} \frac{\arctan X}{X} \text{ et donc une limite}$$

en 1 (la dérivée à gauche de f_1) qui vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 147

$$2 \cosh x + 3 \sinh x = 1 \Leftrightarrow 5e^x - e^{-x} = 2. \text{ On pose bien } \sinh e^x = X.$$

$$5X - \frac{1}{X} = 2, \quad 5X^2 - 2X - 1 = 0. \quad \Delta' = 1 + 5 = 6, \text{ deux solutions } \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}.$$

$\frac{1 - \sqrt{6}}{5}$ est impossible car négatif (or $X > 0$); seul reste $X = \frac{1 + \sqrt{6}}{5}$. Ainsi $x = \ln X = \ln(1 + \sqrt{6}) - \ln 5$.

Exercice 148

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\cosh x) - x].$$

$$\ln(\cosh x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(e^x \left(1 + e^{-2x}\right) \frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(e^x)}_x + \ln(1 + e^{-2x}) - \ln 2.$$

càd $x + \ln(1 + e^{-2x}) - \ln 2$.

Ainsi, $\ln(\cosh x) - x = \underbrace{\ln(1 + e^{-2x})}_0 - \ln 2$ et la limite cherchée vaut $-\ln 2$.

Exercice 149

f est dérivable partout où son dénominateur ne s'annule pas, càd où $\sinh(x) \neq -2$. Or, $\sinh x = -2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{5} - 2)$.

Les intervalles en question sont $]-\infty; \ln(\sqrt{5} - 2)[\cup] \ln(\sqrt{5} - 2); +\infty[$.

Quant à la dérivée, elle vaut au point x :