

$$\frac{(-\sinh^2 x)(2 + \sinh^2 x) - (1 - \cosh^2 x)\cosh^2 x}{(2 + \sinh^2 x)^2}, \text{ car}$$

$$\frac{1 - (\cosh^2 x + 2 \sinh^2 x)}{(2 + \sinh^2 x)^2}, \text{ puisque } \forall x, \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

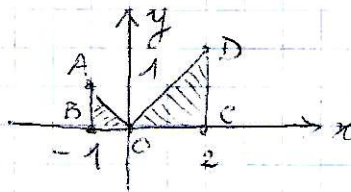
Exercice 150.

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C; \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + K; \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + K;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = -2 \frac{1}{\sqrt{x}} + K; \int \sin x dx = -\cos(x) + C.$$

Exercice 151.

1.



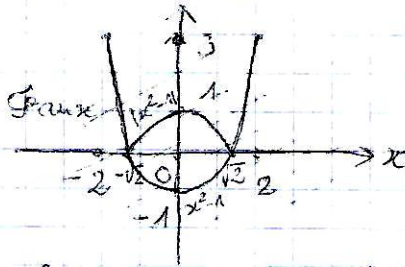
$\int_{-1}^2 |x| dx =$ somme des aires des triangles rectangles OAB et OCD =

$$\frac{1 \times 1}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = \frac{5}{2} \text{ u.a.}$$

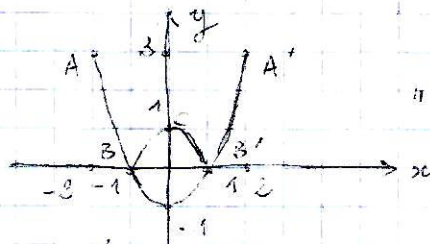
On a aussi $\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$

$$\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} = \frac{5}{2} \text{ u.a.}$$

2.



Recherchons :



$$\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x^2 - 1) dx + 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right) + 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 4$$

(la courbe représentative de $x \mapsto |1 - x^2|$ est constituée des arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{B'A'}$).

3. (a) $D = \{x \mid \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right).$

Intervalle possible de définition : $\left] \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan(x) + C.$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C; \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

Exercice 152 1. (a) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + K$

(b) $\int x^4 (1+x^5)^5 dx = \frac{1}{30} (1+x^5)^6 + C$

(c) $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 + C$

(d) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + C$

(e) $\int \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx = e^{-1/x} + C$

(f) $\int \sin^3 t \cos t dt = \frac{1}{4} \sin^4 t + C$

(g) $\int \frac{\sin x}{(\cos x)^{4/5}} dx = -5 (\cos x)^{1/5} + C$

(h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{2} (1-x^4)^{1/2} + C$

2. (a) $\int e^{1-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{1-3x} + C$

(b) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

(c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

Exercice 153. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan(x) + C$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cotan^3 x dx = -\frac{1}{4} \cotan^4 x + C$

↓
opposé de la dérivée de cotan

$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C$

Exercice 154. $\int_0^2 (3x+2)e^{-x} dx = \int_0^2 (3x+2)d(-e^{-x}) = \left[(3x+2)(-e^{-x})\right]_0^2 - \int_0^2 3(-e^{-x}) dx =$
 $-8e^{-2} + 2 + 3[-e^{-x}]_0^2 = -8e^{-2} + 2 + 3(1 - e^{-2})$
 $= 5 - 11e^{-2}$

$\int_0^{\pi/3} t \cos t dt = \int_0^{\pi/3} t d(\sin t) = [t \sin t]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \sin t dt =$

$$(-1) = \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} + [\cos t]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt &= \int_0^1 t d(2\sqrt{t+1}) = [2t\sqrt{t+1}]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{t+1} dt = \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \times \frac{2}{3} [(t+1)^{3/2}]_0^1 = \\ &= 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= \int_0^1 x^2 d(e^x) = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - \int_0^1 2x e^x dx = \\ &= e - \int_0^1 2x d(e^x) = e - \left\{ [2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right\} = e - \left\{ 2e - [2e^x]_0^1 \right\} = \\ &= e - \{ 2e - (2e - 2) \} = e - 2. \end{aligned}$$

$$\int_0^x \underbrace{e^t}_{\text{notée } I} \underbrace{\cos t}_{\text{notée } J} dt = \int_0^x \cos t d(e^t) = [\cos t e^t]_0^x - \int_0^x (-\sin t) e^t dt = e^x \cos(x) - 1 + \int_0^x \sin t e^t dt.$$

$$\int_0^x \underbrace{e^t}_{\text{notée } I} \underbrace{\sin t}_{\text{notée } J} dt = \int_0^x \sin t d(e^t) = [\sin t e^t]_0^x - \int_0^x \cos t e^t dt = \sin(x) e^x - \int_0^x \cos t e^t dt.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} I = e^x \cos(x) - 1 + J \\ J = \sin(x) e^x - I \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} I - J = e^x \cos(x) - 1 \\ I + J = e^x \sin(x) \end{cases}$$

$$I = e^x \left(\frac{\cos x + \sin x}{2} \right) - \frac{1}{2}.$$

On vérifie au passage que I s'annule en 0.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \cos t dt &= \int_0^\pi t^2 d(\sin t) = \underbrace{[t^2 \sin t]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi 2t \sin t dt = \int_0^\pi 2t (-\sin t) dt = \\ &= \int_0^\pi 2t d(\cos t) = [2t \cos t]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \cos t dt = 2\pi - 2 [\sin t]_0^\pi = -2\pi. \end{aligned}$$

Négatif... On se rappelle que $\cos \leq 0$ sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, or t^2 est plus grand sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ que sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln x dx &= \int_1^2 \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^3}{3} \frac{1}{x}}_{\frac{x^2}{3}} dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \cos^3 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x d(\sin x) = \underbrace{[\cos^2 x \sin x]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi 2 \cos x \sin^2 x dx =$$

$$= 2 \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^\pi = 0. \text{ En fait : } \int_0^\pi \cos^3 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \, dt + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3 t \, dt}_{t = \pi - u} \quad (64)$$

$$\int_1^e \ln t \, dt = \int_1^e \ln t \, d(t) = [t \ln t]_1^e - \int_1^e \frac{t}{t} \, dt = 2 \ln 2 - 1.$$

Enfin, $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\pi/4} x \, d(\tan x) = \underbrace{[x \tan x]_0^{\pi/4}}_{= \frac{\pi}{4}} - \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left[\ln(\cos x) \right]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

cad $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$

Exercice 155.

$$I_n = \int_1^e x^n (\ln x)^n \, dx.$$

$$1. I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \int_1^e \ln x \, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \underbrace{\left[(\ln x) \frac{1}{3} x^3 \right]_1^e}_{\frac{1}{3} e^3} - \int_1^e \frac{1}{3} \frac{x^3}{x} \, dx = \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3 - 1}{9}.$$

Est-à-dire : $I_1 = \frac{1}{3} e^3 - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{1}{9} (2e^3 + 1).$

$$2. I_{n+1} = \int_1^e x^n (\ln x)^{n+1} \, dx = \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \left[(\ln x)^{n+1} \frac{x^3}{3} \right]_1^e - \int_1^e (n+1) (\ln x)^n \frac{x^2}{3} \, dx.$$

Est-à-dire :

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

$$\frac{x^3}{3} \downarrow \frac{1}{x}$$

Exercice 156

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} \, dx, \quad I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} \, dx.$$

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+1} \, d\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right) = \left[x^{n+1} \frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n \frac{e^{x^2}}{2} \, dx =$$

$$\text{Soit : } I_{n+2} = \frac{1}{2} e - \frac{n+1}{2} I_n, \text{ pour tout } n.$$

$$I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Donc $I_3 = \frac{1}{2}e - \frac{3}{2}I_1 = \frac{1}{2}e - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}$ et $I_5 = \frac{1}{2}e - 2I_3$, c'est

$I_5 = \frac{1}{2}e - 1$. On constate que $I_1 > I_3 > I_5$, ce qui est prévisible car (I_n) est (facilement) décroissante.

Exercice 157 $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$, d'où. C'est-à-dire $\sin^4 x = 1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x$.

Donc $\cos^2 x \sin^5 x = (\sin x \sin^4 x) \cos^2 x =$
 $(\sin x)(\cos^2 x + \cos^6 x - 2\cos^4 x)$.

Par conséquent : $\int_0^{\pi/6} \cos^2 x \sin^5 x dx = \int_0^{\pi/6} (\sin x) \cos^2 x dx + \int_0^{\pi/6} (\sin x) \cos^6 x dx$
 $- 2 \int_0^{\pi/6} (\sin x) \cos^4 x dx =$
 $\left[-\frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi/6} + \left[-\frac{\cos^7 x}{7} \right]_0^{\pi/6} - 2 \left[-\frac{\cos^5 x}{5} \right]_0^{\pi/6}$

Ainsi : $\int_0^{\pi/6} \cos^2 x \sin^5 x dx = -\frac{1}{3} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 1 \right) - \frac{1}{7} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^7 - 1 \right)$
 $- 2 \left(-\frac{1}{5} \right) \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 - 1 \right)$

Au total, et tous calculs faits :

Exercice 158 $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

$(\forall x) \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{8} \frac{(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{2}$

C'est-à-dire : $\cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$.

On en déduit $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \left[\frac{\sin(4x)}{4} + 4 \frac{\sin(2x)}{2} + 3x \right]_0^{\pi}$

$= \frac{3}{8} \pi$.

Exercice 159

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)^n}_{=\cos u} du = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^n du = J_n. \text{ Puis:}$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^0 dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1. \text{ Et plus:}$$

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2} dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} (\sin t) dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} d(-\cos t) = \underbrace{\left[(\sin t)^{n+1} (-\cos t) \right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} (n+1) (\sin t)^n \cos t (-\cos t) dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \cos^2 t dt =$$

$$(n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (1 - \sin^2 t) dt = (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2} dt \right) =$$

$$(n+1)(I_n - I_{n+2}). \text{ Ainsi: } I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}), \text{ c'est-à-dire}$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Pour la formule indiquée dans le texte, on procède par récurrence en posant

$$P(p) = "I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}."$$

$P(0)$ est vraie car $0! = 1! = 1$: on retrouve les valeurs trouvées plus haut.

Le maintenant $P(p)$ est vraie pour un entier $p \geq 0$, on a :

$$I_{2p+2} = I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} =$$

$$\frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{(2p+2)^2 2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{4(p+1)^2 2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

$$= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} (p+1)!^2} \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{De même: } I_{2p+3} = I_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} =$$

$$\frac{(2p+2)^2 2^{2p} (p!)^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} = \frac{4(p+1)^2 (p!)^2 2^{2p}}{(2p+3)!} = \frac{(p+1)!^2 2^{2(p+1)}}{(2(p+1)+1)!}.$$

Ainsi $P(p+1)$ est vraie et le résultat suit par le principe de récurrence.

Exercice 160 ($x = \sin u$) $\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx =$
 $dx = \cos u du, u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/6} \cos^2 u \, du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/6} \frac{1+\cos 2u}{2} \, du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/6} =$$

$\cos u \geq 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}]$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{8}\sqrt{3}.$$

Pour la deuxième intégrale : $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/6} \cos^2 u \, du = \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos 2u}{2} \, du$,
 $x = \sin u, dx = \cos u \, du, u \in [0; \frac{\pi}{6}]$
 c'est-à-dire $\frac{1}{2} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\pi/6}$, soit encore $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

Avec l'autre changement, cela donne :

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 u \, (-\sin u \, du) = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 u \, du$$

$x = \cos u, dx = -\sin u \, du, u \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 u \, du = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2u}{2} \, du = \frac{1}{2} \left[u - \frac{\sin 2u}{2} \right]_{\pi/3}^{\pi/2}, \text{ soit}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) : \text{résultat identique au précédent.}$$

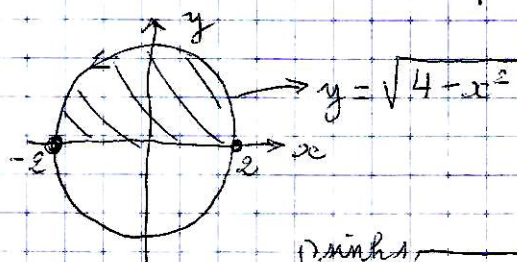
Enfin, $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-t^2} (2 \, dt) =$
 $x = 2t, dx = 2 \, dt, t \in [-1; 1]$

$$4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, dt = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt,$$

$x = \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], dx = \cos t \, dt.$

c'est-à-dire : $2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2\pi.$

Il s'agit de l'aire du demi-disque (de centre 0, disons) et de rayon 2.



Exercice 161.

$$\int_0^{\sinh 1} \sqrt{1+x^2} \, dx = \int_0^1 (\cosh u)^2 \, du =$$

$x = \sinh u, u \in [0; 1], dx = \cosh u \, du; 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$

$$\left[\cosh^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (e^{2u} + e^{-2u} + 2) = \frac{1}{2} (1 + \cosh 2u) \right]$$

Ainsi, l'intégrale vaut

$$\int_0^1 \frac{1}{2} (1 + \cosh 2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{\sinh 2u}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sinh 2}{2} \right).$$

Puis : $\int_{-1}^1 \sqrt{4+x^2} dx = \int_{-2\sinh \lambda}^{2\sinh \lambda} 2(\cosh u) (2 \cosh u) du = 4 \int_{-\lambda}^{\lambda} (\cosh u)^2 du =$
 $x = 2\sinh u, u \in [\operatorname{argsinh}(-\frac{1}{2}); \operatorname{argsinh}(\frac{1}{2})]$

note $-\lambda$ note λ

$$4 \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2} (1 + \cosh 2u) du = 2 \left[u + \frac{\sinh 2u}{2} \right]_{-\lambda}^{\lambda} = 4 \left(\lambda + \frac{\sinh(2\lambda)}{2} \right).$$

Mais $\sinh(2\lambda) = \sinh(2 \operatorname{argsinh}(\frac{1}{2})) = 2 \sinh(\operatorname{argsinh}(\frac{1}{2})) \cosh(\operatorname{argsinh}(\frac{1}{2}))$
 $= \frac{1}{2} = \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2}$

Ainsi, $\int_{-1}^1 \sqrt{4+x^2} dx = 4 \left(\lambda + \frac{1}{4} \sqrt{5} \right).$

Exercice 162

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (2 \cos t)^2 dt = 8 \int_0^{\pi/6} (\cos t)^2 dt,$$

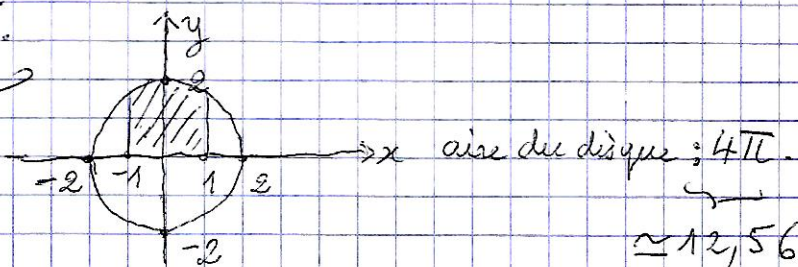
$x = 2 \sin t, t \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$
 $dx = 2 \cos t dt$ par parité

c'est-à-dire :

$$8 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = 4 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/6} =$$

$$4 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) = \frac{2}{3} \pi + \sqrt{3}.$$

$\approx 3,82$



Exercice 163

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4. \text{ On pose donc } x+1 = 2t,$$

$dx = 2 dt, t \in [0; 1]$ dans l'intégrale pour obtenir

$$\int_0^1 \frac{1}{4(t^2+1)} 2 dt, \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{2} [\arctan t]_0^1, \text{ c'est-à-dire } \frac{\pi}{8}.$$

Ensuite, $f'(x) = 2(x+1)$ et $\frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{x+1-1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x^2+2x+5}$

On en déduit que $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x^2+2x+5} \right) dx$, (6.9)

càd $\left[\frac{1}{2} \ln |f(x)| \right]_{-1}^1 - \frac{\pi}{8}$, soit $\frac{1}{2} \ln(8) - \frac{1}{2} \ln(4) - \frac{\pi}{8}$.

On obtient au total $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{8}$.

Exercice 164.

$$\int_0^x \frac{1}{t^2+4} dt = \int_0^{x/2} \frac{1}{4(t^2+1)} 2dx = \frac{1}{2} \int_0^{x/2} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\arctan t \right]_{t=0}^{t=x/2} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Puis $\int_0^x \frac{t+1}{t^2+4} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \frac{2t}{t^2+4} + \frac{1}{t^2+4} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{t^2+4} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+4} dt =$

$$\frac{1}{2} \left[\ln(t^2+4) \right]_0^x + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} (\ln(x^2+4) - 2\ln 2) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 165

$$\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_2^4 = \frac{2}{3}; \quad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx,$$

càd $\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \left[\arctan x \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4} dx = \left[\ln(x^2+4) \right]_0^1 = \ln(5) - \ln(4).$$

Enfin $\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \left[\ln(x^2+2x+5) \right]_0^1 = \ln(8) - \ln(5).$

Exercice 166.

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{4(t^2+1)} 2dt = \frac{1}{2} \arctan(t) + C,$$

soit $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$.

Puis $\int \frac{x+1}{x^2+4} dx = \int \left(\frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Exercice 167/169 $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = f(x).$

Il existe trois nombres a, b et c tels que : $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1},$

Pour trouver a , b et c , il suffit de réduire au même dénominateur.

On obtient $1 = a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2$. Un petit développement s'impose : $1 = a(x^2-1) + b(x+1) + c(x^2-2x+1)$.

$1 = (c+b-a) + (b-2c)x + (a+c)x^2$, ce pour tout $x \neq \pm 1$. Ce n'est possible que si :

$$\begin{cases} c+b-a=1 \\ b-2c=0 \\ a+c=0 \end{cases}, \text{ c\`ad } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(a, b, c) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+2c=1 \\ -4c=-1 \end{cases}$$

Au total, $f(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1}$ pour $x \neq \pm 1$.

Les primitives sur $]1; +\infty[$ sont donc :

$$-\frac{1}{4} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln(x+1) + C.$$

Exercice 168. 1. On obtient aussitôt : $1 = a(u+2) + b(u+1)$, soit $\forall u \text{ (en fait)}$

$$1 = (a+b)u + (2a+b). \text{ Soit : } \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}, \text{ c\`ad } a = \frac{1}{1} \text{ et } b = \frac{-1}{1}.$$

2. $F(x) = \int_0^x \frac{du}{u^2+3u+2} = \int_0^x \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2} \right) du = [\ln(u+1) - \ln(u+2)]_0^x$,
c'est-à-dire $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \ln 2$.

3. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$. $\left(\frac{x+1}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } \ln 1 = 0 \right)$

4. Le changement de variable $u = \sin t$ donne dans l'intégrale proposée

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(\sin t)^2 + 3 \sin t + 2} dt = \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 3u + 2} = F(1) \quad (71)$$

On obtient la valeur $\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 2$, soit $2\ln 2 - \ln(3)$.

Exercice 170

$y' + y \cos x = 0$. On recherche une solution non identiquement nulle.

$$\frac{y'}{y} = -\cos x \quad \int \frac{y'}{y} dx = \int (-\cos x) dx \quad \ln|y(x)| = (-\sin x) + C.$$

$|y(x)| = \exp(C - \sin x)$ et donc, sur un intervalle de $\mathbb{R}$ donné :

$y(x) = \lambda e^{-\sin x}$, où λ est une constante. ($\lambda = 0$ donne la solution identiquement nulle)

Exercice 171

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \cos x.$$

Équation homogène associée : $y' + 2xy = 0$.

$$\frac{y'}{y} = -2x \quad \ln|y| = -x^2 + C, \quad C \text{ constante.}$$

$$|y| = \exp(C - x^2); \quad y = \lambda e^{-x^2}, \quad \lambda \text{ constante.}$$

"Variation de constante" $\lambda = \lambda(x)$. On obtient :

$$(\lambda' e^{-x^2} - 2x \lambda e^{-x^2}) + 2x(\lambda e^{-x^2}) = e^{-x^2} \cos x.$$

$$\lambda' = \cos x. \quad \text{Donc } \lambda(x) = \sin(x) + C, \quad C \text{ constante quelconque.}$$

Ainsi la "solution générale" (et par la suite) de l'équation est

$$(C + \sin x) e^{-x^2}.$$

Exercice 172

$$1. \quad y' = xy.$$

$$\frac{y'}{y} = x \quad \int \frac{y'}{y} = \int x dx \quad \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$|y| = e^{C + \frac{1}{2}x^2} \text{ et donc } y(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad \lambda \text{ constante quelconque.}$$

$$2. \quad y' + xy = x. \quad \text{E.D. homogène associée : } y' + xy = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -x \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad |y| = e^{C - \frac{1}{2}x^2} \quad y = \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \lambda =$$

solution de l'équation homogène
Constante quelconque

Variation de constante : $\lambda = \lambda(x)$. $(\lambda(x) e^{-\frac{1}{2}x^2})' + x(\lambda e^{-\frac{1}{2}x^2}) = x.$

$$\lambda' e^{-\frac{1}{2}x^2} - x\lambda e^{-\frac{1}{2}x^2} + x\lambda e^{-\frac{1}{2}x^2} = x.$$

$$\lambda' = x e^{\frac{1}{2}x^2}. \quad \lambda(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} + C, \quad C = \text{constante quelconque}.$$

Ainsi, la solution générale (SG ou y_G) est :

$$y_G = (e^{\frac{1}{2}x^2} + C) e^{-\frac{1}{2}x^2}, \text{ c\`ad } y_G = \underbrace{1}_{SP} + \underbrace{C e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{y_H}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

("solution particulière")

On v\'erifie aussit\^ot que $1' + x \cdot 1 = x$. ($\forall x$)

3. $xy' - y = x^3$.

EDHA ("\'equation diff\'erentielle homog\'ene associ\'ee") $xy' = y$.

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}. \quad \int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1}{x} dx. \quad \ln|y| = \ln|x| + \lambda.$$

$$|y| = e^{\ln|x| + \lambda} = e^\lambda e^{\ln|x|} = e^\lambda |x|.$$

$$y_H = Kx, \quad K = \text{constante}.$$

$$K = K(x). \quad \text{On remplace dans l'\'equation : } x(K'x + K) - Kx = x^3$$

$$K' = x. \quad K = C + \frac{1}{2}x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$SG: y_G = (C + \frac{1}{2}x^2)x = \underbrace{Cx}_{y_H} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{y_P}.$$

La m\^eme, on v\'erifie que y_P est bien une solution particuli\`ere de l'E.D.

$$\text{De fait : } x(\frac{3}{2}x^2) - \frac{1}{2}x^3 = x^3.$$

4. $y' + (\tan x)y = (\sin x)(\cos x)$.

$$EDHA: y' + (\tan x)y = 0. \quad \frac{y'}{y} = -\tan x = \frac{-\sin x}{\cos x}.$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + K. \quad |y| = e^{K + \ln|\cos x|} = e^K e^{\ln|\cos x|}.$$

$$|y| = \lambda |\cos x|. \quad y = C \cos(x), \quad C \in \mathbb{R} \text{ est constante}.$$

$$C = C(x). \quad y' = C' \cos(x) - C \sin(x). \quad \text{Donc}$$

$$y' + (\tan x)y = C' \cos(x) - C \sin(x) + C \sin(x) = (\sin x)(\cos x).$$

Ce qui entraîne : $C' = \sin(x)$. $C(x) = -\cos(x) + \lambda$.

Ainsi, la SG est $y_G = (\lambda - \cos x) \cos x$, càd

$$y_G = \underbrace{\lambda \cos x} - \underbrace{\cos^2 x}$$

on vérifie que y_H que y_P ($-\cos^2 x$) est une solution particulière de l'équation :

$$2(\cos x)(\sin x) + (\tan x)(-\cos^2 x) = 2(\cos x)(\sin x) - (\sin x)(\cos x) = (\sin x)(\cos x).$$

Exercice 173. 1. $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

$$y = Ce^{-x}. \quad y(0) = C \text{ et donc } C = 1.$$

ainsi $y = e^{-x}$.

2. $\begin{cases} 2y' - y = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ $y = Ce^{\frac{1}{2}x}$. $y(0) = C = 1$ et donc $y(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

3. $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1. \end{cases}$ on utilise la première question de l'exercice précédent :
 $y = Ae^{\frac{1}{2}x^2}$. $y(0) = A = 1$. Donc $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$.

4. $\begin{cases} y' + 5y = 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Equation caractéristique : $\lambda + 5 = 0$ donc $\lambda = -5$.

SGEHA : $y_H = Ce^{-5x}$. Variation de constante $C = C(x)$.

$$C'e^{-5x} - 5Ce^{-5x} + 5Ce^{-5x} = 3. \quad C' = 3e^{5x}. \quad C(x) = \frac{3}{5}e^{5x} + \underset{\text{constante}}{C}$$

ainsi : $y_G = \left(\frac{3}{5}e^{5x} + C\right)e^{-5x} = Ce^{-5x} + \frac{3}{5}$.

La "bonne" constante C est trouvée en écrivant : $C + \frac{3}{5} = 0$, càd que

$$C = -\frac{3}{5}. \text{ ainsi : } y(x) = \frac{3}{5}(1 - e^{-5x}).$$

5. $\begin{cases} y' + 3y = 4e^x \\ y(0) = -2. \end{cases}$

On voit aussitôt que e^x est solution particulière.

Mais reprenons dès le départ. $\lambda + 3 = 0$, $\lambda = -3$. $y_H = Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$$C = C(x). \text{ Substituant dans l'équation : } C'e^{-3x} - 3Ce^{-3x} + 3Ce^{-3x} = 4e^x. \quad (74)$$

$$C'(x) = 4e^{4x}. \quad C(x) = e^{4x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

$$\text{Donc } y_G = (\lambda + e^{4x})e^{-3x} = e^x + \lambda e^{-3x}. \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\text{Mais } y(0) = -2 \text{ et donc } \lambda = -3. \text{ Au total : } \underline{y(x) = e^x - 3e^{-3x}}.$$

Exercice 174 ① $y' + y = xe^{-x} + 1.$

SGEHA $y_H = \lambda e^{-x} (\lambda \in \mathbb{R})$. Recherche de SP : de $y' + y = 1$.

Solution évidente $y_{p1} = 1$.

Recherche de SP : de $y' + y = xe^{-x}$.

$y_{p2} = \lambda e^{-x}, \lambda = \lambda(x).$

$$\lambda' e^{-x} - \lambda e^{-x} + \lambda e^{-x} = x e^{-x}$$

$$\lambda' = x. \quad \lambda = \frac{1}{2}x^2 + \text{cte.}$$

Je choisis : cte = 0 et donc $\lambda = \frac{1}{2}x^2$.

$$y_{p2} = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$$

Au total : $y_p = y_{p1} + y_{p2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$

Et la SG de ① est $y_H + y_p = \lambda e^{-x} + 1 + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$

② $3y' + 2y = 2x^3 + 9x^2 + 14.$ Ici, $y_H = Ce^{-2/3x}, C \in \mathbb{R}$. Pour y_p , on la recherche sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. On obtient :

$$3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 + 9x^2 + 14.$$

$$(2a)x^3 + (9a + 2b)x^2 + (6b + 2c)x + (3c + 2d) = 2x^3 + 9x^2 + 14.$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 9a + 2b = 9 \\ 6b + 2c = 0 \\ 3c + 2d = 14 \end{cases} \quad \text{càd } a = 1, b = 0, c = 0 \text{ et } d = 7.$$

Ainsi, $y_p(x) = x^3 + 7.$

③ $y' - y = \sin(x) + 2\cos(x).$ $y_H(x) = Ce^x, C \in \mathbb{R}.$

$$y_p(x) = a\sin x + b\cos x. \quad y'_p(x) = a\cos x - b\sin x.$$

$$y'_p - y_p = (a - b)\cos x + (-b - a)\sin x.$$

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ -a - b = 1 \end{cases} \quad \text{càd } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{3}{2}.$$

Ainsi : $y_p(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x.$ Puis $y_G(x) = Ce^x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x.$
($C \in \mathbb{R}$).

④ $y' = 3y + x^2 e^x + \sin x$. $y_H(x) = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(75)

y_{p_1} solution de $y' = 3y + x^2 e^x$. Recherche sous la forme $(ax^2 + bx + c)e^x$.

On substitue : $e^x(2ax + b + ax^2 + bx + c) = 3(ax^2 + bx + c)e^x + x^2 e^x$.

C'est-à-dire : $ax^2 + (2a + b)x + (b + c) = (3a + 1)x^2 + 3bx + 3c$.

Et donc :
$$\begin{cases} a = 3a + 1 \\ 2a + b = 3b \\ b + c = 3c \end{cases} \text{ d'où } a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = -\frac{1}{4}.$$

$\Rightarrow y_{p_1}(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x$.

y_{p_2} solution de $y' = 3y + \sin x$. Recherche sous la forme $a \cos x + b \sin x$.

$-a \sin x + b \cos x = 3a \cos x + 3b \sin x + \sin x$. D'où :
$$\begin{cases} b = 3a \\ -a = 3b + 1 \end{cases}$$

C'est-à-dire $a = -\frac{1}{10}$ et $b = -\frac{3}{10}$.

Au total, $y_G(x) = Ce^{3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x - \frac{1}{10}(\cos(x) + 3\sin(x))$.

la SG est

Exercice 175
$$\begin{cases} (1+x^2)y' = y \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{si } y \text{ n'est pas identiquement nulle})$$

$\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$. $\ln|y| = \arctan(x) + C$. $|y| = \exp(C + \arctan(x))$.

et $y(x) = \lambda \exp(\arctan(x))$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais $\lambda \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et donc.

$\lambda = 2e^{-\pi/4}$. Ainsi $y(x) = 2e^{\arctan(x) - \pi/4}$.

Exercice 176 1. Immédiat. 2. $y' + y = e^{-x}(\cos(x) + x^2)$.

SGEHA $y_H(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. y_{p_1} solution de $y' + y = e^{-x} \cos x$.

$y_{p_1}(x) = e^{-x}(a \cos(x) + b \sin(x))$. On obtient : $y'_{p_1}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} -a \cos(x) - b \sin(x) \\ -a \sin(x) + b \cos(x) \end{pmatrix}$

et donc $e^{-x}(-a \cos(x) - b \sin(x) - a \sin(x) + b \cos(x)) + e^{-x}(a \cos(x) + b \sin(x)) =$

$e^{-x} \cos x$. D'où :
$$\begin{cases} -a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \text{ et donc } y_{p_1}(x) = e^{-x} \sin x$$

Puis y_{p_2} solution de $y' + y = e^{-x} x^2$. Donc $y_{p_2}(x) = e^{-x}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.

On substitue :

Avec $y'_{p_2}(x) = e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d)$, (76)

$(y'_{p_2} + y_{p_2})(x) = e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c) = e^{-x}x^2$, c'est-à-dire

$3a = 1$ ($a = \frac{1}{3}$), $b = c = 0$.

Ainsi $y_{p_2}(x) = \frac{1}{3}x^3e^x$. Au total, la solution générale $y_G(x) = e^{-x}(C + \sin(x) + \frac{1}{3}x^3)$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 177 ① $\begin{cases} (x-1)y' + (x-2)y = x(x-1)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ sur $] -\infty; 1[$.

EHA : $(x-1)y' + (x-2)y = 0$.

$\frac{y'}{y} = -\frac{x-2}{x-1}$. $\int \frac{y'}{y} dx = -\int \frac{x-2}{x-1} dx = -\int \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) dx$,

$\ln|y| = \ln|x-1| - x + C$. $|y| = e^{C-x}|x-1| = e^{C-x}(1-x)$.

$y = \lambda e^{-x}(1-x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Variation de constante $\lambda = \lambda(x)$.

$(x-1)[\lambda' e^{-x}(1-x) - \lambda e^{-x}(1-x) - \lambda e^{-x}] + (x-2)\lambda e^{-x}(1-x) = x(x-1)^2$ sur $] -\infty; 1[$. Ainsi : $\lambda' = -xe^x$.

$\lambda(x) = -\int xe^x dx = -\left(\int x d(e^x) = xe^x - \int e^x dx\right) = e^x - xe^x + Cte$.

Ainsi, l'ensemble des solutions cherchées est $(e^x - xe^x + Cte)e^{-x}(1-x)$, soit $(1-x)(1-x + Cte e^{-x})$, c'est-à-dire $(x-1)^2 + Ke^{-x}(1-x)$, $K \in \mathbb{R}$.

Pour la condition au point 0 : $1 + K = 0$, $K = -1$.

On résume, une seule solution, qui est $(x-1)^2 + (x-1)e^{-x}$.

② Sur $]1; +\infty[$.

Les calculs précédents restent valables et donnent les solutions

$x \mapsto (x-1)^2 + Ke^{-x}(1-x)$, K constante quelconque.

Exercice 178. 1. Sur $] -\infty; 0[$, l'équation (E) s'écrit :

$-xy'(x) + y(x) = x^3$.

EDHA : $xy' = y$. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$. $\ln|y| = \ln(x) + K$. $|y| = f(x)e^K$. $y = Cx$, $C =$ constante.

$$-x [xC'(x) + C(x)] + xC(x) = x^3, \text{ c\`ad } C'(x) = -x. \quad (77)$$

$C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + K$; $K = \text{une constante r\`eelle quelconque}$. Donc la SG est

$$y_G(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + K\right)x = Kx - \frac{1}{2}x^3. \quad (1)$$

Sur $]0; \infty[$, (E) s'écrit : $xy'(x) + y(x) = x^3$.

EDHA : $xy' = -y$. $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$. $\ln|y| = -\ln(x) + K, K \in \mathbb{R}$.

$|y| = \exp(K - \ln(x)) = \frac{e^K}{x}$. $y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$. Variation de constante :

$C = C(x)$. $x \left[\frac{-xC' - C}{x^2} \right] + \frac{C}{x} = x^3$. $C' = x^3$. $C = K + \frac{1}{4}x^4, K \in \mathbb{R}$.

La solution g\`en\`erale est cette fois $\left(K + \frac{1}{4}x^4\right) \frac{1}{x}$, c'est-\`a-dire

$$y_G(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

2. On remarque pour commencer que sur $\mathbb{R}_+^*$, $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est du type (1) ; sur $\mathbb{R}_-^*$, f restreinte \`a  $\mathbb{R}_-^*$  est du type (2). En outre,  $f$  est d\`erivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme sur $\mathbb{R}_-^*$.

Il reste maintenant \`a observer que  $f$  est d\`erivable en 0 puisque : $(f(0)=0)$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} \text{ si } x > 0 \end{cases} \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 0 : f'(0) \text{ existe}$$

et vaut 0.

Exercice 179 ① $y' + 3x^2y = x^2$.

1. EDHA $\frac{y'}{y} = -3x^2$. $\ln|y| = -x^3 + K$.

$|y| = e^{\ln|y|} = e^{K-x^3} = e^K e^{-x^3}$. $y = Ce^{-x^3}, C \in \mathbb{R}$.

$C = C(x)$. $y' = C'e^{-x^3} - 3x^2Ce^{-x^3}$. $3x^2y = C(3x^2e^{-x^3})$.

$y' + 3x^2y = x^2 \iff C'e^{-x^3} = x^2$, c'est-\`a-dire $C' = x^2e^{+x^3}$.

Donc $C(x) = +\frac{1}{3}e^{+x^3} + A$ ($A = \text{constante r\`eelle}$).

Ainsi : $y(x) = \left(A + \frac{1}{3}e^{x^3}\right)e^{-x^3} = Ae^{-x^3} + \frac{1}{3}$. ($A \in \mathbb{R}$)

② $y(0) = 1 \iff A + \frac{1}{3} = 1$. Ainsi, la solution cherch\`ee est donn\`ee par :

$$y(x) = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-x^3})$$