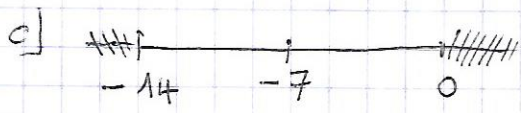
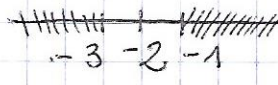


c)  $|x+7| \geq 7 \Leftrightarrow x+7 \leq -7 \text{ ou } x+7 \geq 7$, càd

d) $|x+5| \leq -9$ est évidemment impossible! $x \leq -14$ ou $x \geq 0$

e) $|x - 2\sqrt{3}| > -2\sqrt{3}$ est évidemment toujours vrai!

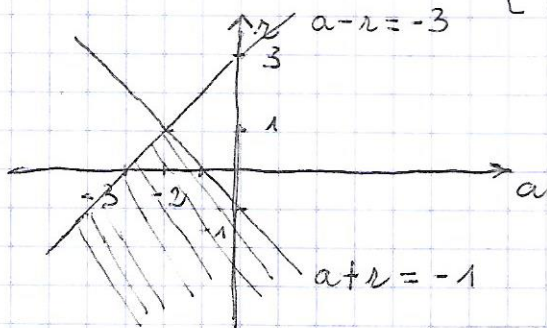
Exercice 60.

 Il s'agit de trouver a et r tels que

$|x+2| \geq 1 \Rightarrow |x-a| \geq r$. C'est-à-dire tels que

$]-\infty; -3] \cup [-1; \infty[\Rightarrow]-\infty; a-r] \cup [a+r; \infty[$.

Ce sera le cas si $\begin{cases} a-r \geq -3 \\ \text{et} \\ a+r \leq -1 \end{cases}$. Par exemple, $(a, r) = (-2, 1)$



Tout couple (a, r) dans la zone hachurée convient.

Exercice 61.

a) $|x-1| = |3-x| + 2$

x	$-\infty$	1	3	∞
$ x-1 $	$1-x$	$\emptyset$	$x-1$	$x-1$
$ 3-x $	$3-x$		$3-x$	$x-3$

(E) $\begin{cases} 1-x = 3-x \\ \mathcal{Y}_1 = \emptyset \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 = 3-x \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 = x-1 \\ \mathcal{Y}_3 = [3; \infty[\end{cases}$

$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 = [3; \infty[$

b) $|2x-5| = 2|x-4| + 3$

x	$-\infty$	$5/2$	4	∞
$ 2x-5 $	$5-2x$	$\emptyset$	$2x-5$	$2x-5$
$ x-4 $	$4-x$		$4-x$	$x-4$
(E)	$5-2x = 4-x$ $8-2x+3$	$2x-5 = 4-x$ $8-2x+3$	$2x-5 = 2x-8+3$	
	$\mathcal{Y}_1 = \emptyset$	$\mathcal{Y}_2 = \{4\}$	$\mathcal{Y}_3 = [4; \infty[$	

ne convient pas

$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 = [4; \infty[$

c) $|x+6| \leq |x-10|$

x	$-\infty$	-6	10	∞
$ x+6 $	$-x-6$	$\emptyset$	$x+6$	$x+6$
$ x-10 $	$10-x$		$10-x$	$x-10$

On obtient $\mathcal{Y}_1 =]-\infty; -6]$, $\mathcal{Y}_2 =]-\infty; 2] \cap [-6; 10] = [-6; 2]$ et $\mathcal{Y}_3 = \emptyset$. (17)

Ainsi, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 =]-\infty; 2]$.

d) $|5-2x| > 2|x+3|$.

x	$-\infty$	-3	$5/2$	∞
$ 5-2x $	$5-2x$	$5-2x$	0	$2x-5$
$2 x+3 $	$-2x-6$	0	$2x+6$	$2x+6$
(I)	$5 > -6$	$4x < -1$	$-5 > 6$	
	est solution		n'est pas solution	

Ainsi, $\mathcal{Y}_1 =]-\infty; -3]$ et $\mathcal{Y}_2 = [-3; \frac{5}{2}] \cap]-\infty; -\frac{1}{4}[= [-3; -\frac{1}{4}[$, $\mathcal{Y}_3 = \emptyset$. Au total: $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 =]-\infty; -\frac{1}{4}[$.

e) $|x+6| + |x-10| < 16$ n'a aucune solution. En effet, l'inégalité triangulaire complète (p. 28, propriété 2.5 (3)) : $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ donne $|x+6| + |x-10| \geq |(x-10) - (x+6)| = 16$ pour tout x .

f) $|x+6| + |x-10| \geq 15$ est vraie pour tout x d'après ce qui précède (puisque $16 \geq 15$!).

g) $|x-2| \leq |2x-1|$.

x	$-\infty$	$1/2$	2	∞
$ x-2 $	$2-x$	$2-x$	0	$x-2$
$ 2x-1 $	$1-2x$	0	$2x-1$	$2x-1$
(I)	$x \leq -1$	$-3x \leq -3$	$-x \leq 1$	
	n'est pas solution		est solution	

Ainsi, $\mathcal{Y}_1 =]-\infty; -1]$, $\mathcal{Y}_2 = [1; 2]$ et $\mathcal{Y}_3 = [2; \infty[$. Au total, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 =]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$.

Exercice 62. 1. $|a| \leq |b| + |b-a|$, car $a = (a-b) + b$.

2. !

3. $|b| \leq |a| + |a-b|$, en intervertissant les rôles de a et b dans 1.
Donc $|b| - |a| \leq |a-b|$.

4. Il suffit de voir que $||a| - |b|| = \max(|a| - |b|, |b| - |a|)$

et que les deux termes figurant dans le max sont inférieures à $|a-b|$.

Enfin, pour la dernière inégalité, remplacer b par $-b$ dans la première.

$$\begin{cases} 20p + 15v = 325 \\ 13v = 143 \end{cases} \quad \text{donc } v = 11 \text{ puis } p = \frac{1}{20}(325 - 15 \times 11)$$

ainsi $v = 11$ (11 vikings) et $p = 8$ (8 pirates).

Exercice 66. De même :

$$\begin{cases} l + p = 27 \\ 4l + 2p = 72 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 27 \\ 4 & 2 & 72 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 27 \\ 0 & -2 & -36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l + p = 27 \\ -2p = -36 \end{cases} \quad p = 18 \text{ puis } l = 9. \quad 9 \text{ lapins et } 18 \text{ poulets.}$$

Exercice 67. De même encore :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \quad (\text{durée totale de la course}) \\ 3t_1 = 5t_2 \quad (\text{distance départ/arrivée au sommet}) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ -8t_2 = -18 \end{cases} \quad \text{donc } t_2 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2 \text{ heures et quart et } t_1 = 3 \text{ h } \frac{3}{4}.$$

Ainsi, "on" est au sommet à $8 \text{ h} + 3 \text{ h } \frac{3}{4} = \text{midi moins le quart.}$

Exercice 68.

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & -20 \\ -2 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow -L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} +5 & +1 & -2 & +20 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 20 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 3 & 25 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow 7L_2 \\ L_3 \leftarrow 16L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 112 & 21 & 175 \\ 0 & 112 & -32 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 112 & 21 & 175 \\ 0 & 0 & -53 & -159 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 112y + 21z = 175 \\ -53z = -159 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \times 1 + 3 - 1 = 5 \\ y = (175 - 21 \times 3) \times \frac{1}{112} = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{Ainsi } (x, y, z) = (5, 1, 3).$$

$$\begin{cases} -9x + 9y + 6z = 114 \\ 4x - 7z = -91 \\ -x - 2z = -26 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 9 & 6 & 114 \\ 4 & 0 & -7 & -91 \\ -1 & 0 & -2 & -26 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 2 & 38 \\ -4 & 0 & +7 & +91 \\ 1 & 0 & 2 & 26 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 26 \\ -4 & 0 & 7 & 91 \\ -3 & 3 & 2 & 38 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 26 \\ 0 & 0 & 15 & 195 \\ 0 & 3 & 8 & 116 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 26 \\ 0 & 3 & 8 & 116 \\ 0 & 0 & 15 & 195 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2z = 26 \\ 3y + 8z = 116 \\ 15z = 195 \end{cases} \quad \text{donc } z = 13 \text{ puis } y = \frac{1}{3}(116 - 8 \times 13) = 4 \text{ et } x = 26 - 2 \times 13 = 0.$$

ainsi : $(x, y, z) = (0, 4, 13)$.

Exercice 69. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 8 \\ -x + 3y - 4z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2z = -8 \text{ (par addition membre à membre)} \\ x - 3y = 8 - 2z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{Ainsi, } \mathcal{S}_1 = \{ (3y, y, 4) \mid y \text{ réel quelconque} \}.$$

$$\begin{cases} 6x + 3y + 1 = 10 \\ 6x + 3y + 3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow 6x + 3y = 9, \text{ c\`ad } 2x + y = 3.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{S}_2 = \{ (x, 3 - 2x) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Exercice 70.

$$\begin{cases} x + 2y = t^2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t^2 \\ 4 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t^2 \\ 0 & -5 & 1 - 4t^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y = t^2 \\ -5y = 1 - 4t^2 \end{cases} \quad \text{donc } y = \frac{1}{5}(4t^2 - 1) \text{ puis } x = \frac{1}{5}(2 - 3t^2).$$

$$\begin{cases} 2tx + 9y = 21 \\ 8x + ty = 14 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2t & 9 & 21 \\ 8 & t & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 8 & t & 14 \\ 2t & 9 & 21 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4}tL_1}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & t & 14 \\ 0 & 9 - \frac{1}{4}t^2 & 21 - \frac{7}{2}t \end{pmatrix} \begin{cases} 8x + ty = 14 \\ (9 - \frac{1}{4}t^2)y = 7(3 - \frac{1}{2}t) \end{cases} \quad (21)$$

De deux choses l'une : soit $t = \pm 6$, soit $t \neq \pm 6$. Commençons par $t \neq \pm 6$.

$$\begin{cases} 8x + ty = 14 \\ y = 7 \frac{3 - \frac{1}{2}t}{(3 - \frac{1}{2}t)(3 + \frac{1}{2}t)} = \frac{14}{6+t} \end{cases} \quad \text{et donc } x = \frac{1}{8}(14 - ty) =$$

$$\frac{1}{8}\left(14 - \frac{14t}{6+t}\right) = \frac{21}{2} \frac{1}{6+t} \quad \text{Ainsi une seule solution } \left(\frac{121}{6+t}, \frac{14}{6+t}\right) = \frac{7}{6+t} \left(\frac{11}{2}, 2\right)$$

Si au contraire $t = 6$, $\begin{cases} 8x + 6y = 14 \\ 0 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $4x + 3y = 7$. Une infinité de solutions, $\left\{ \left(\frac{7}{4} + t, -\frac{1}{3}(4t + 7) \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Si, enfin, $t = -6$, $\begin{cases} 8x - 6y = 14 \\ 0 = 42 \end{cases}$ C'est évidemment impossible!

Remarque : c'est un cas de figure courant dans ces exercices d'initiation au calcul. Les trois cas se présentent : solution unique, aucune solution ou infinité de solutions.

$$\begin{cases} 2x - (t-1)y = 4 \\ (t+2)x + (2t+1)y = t-1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & -(t-1) & 4 \\ t+2 & 2t+1 & t-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{t+2}{2}L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -(t-1) & 4 \\ 0 & \frac{1}{2}t(t+5) & -(t+5) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x - (t-1)y = 4 \\ \frac{1}{2}t(t+5)y = -(t+5) \end{cases}$$

Si $t = 0$: la deuxième équation s'écrit $0 = -5$. Il n'y a pas de solution.

Si $t = -5$: le système équivaut à $\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$.

L'ensemble solution est $\{(2-3y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Si $t \notin \{-5; 0\}$, le système donne aussitôt : $y = -\frac{2}{t}$ puis $x = 1 + \frac{1}{t}$.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \\ x + 4y + tz = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & t & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & t & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & t & 0 \\ 0 & -11 & 2-2t & 3 \\ 0 & -11 & -1-3t & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & t & 0 \\ 0 & -11 & 2-2t & 3 \\ 0 & 0 & -3-t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 4y + tz = 0 \\ -11y + (2-2t)z = 3 \\ (-3-t)z = 0 \end{cases}$$

Deux cas : $t \neq -3$, et alors une solution et une seule, $(\frac{12}{11}, -\frac{3}{11}, 0)$, indépendante de t d'ailleurs.
 $t = -3$, et alors une infinité de solutions.

z est indéterminé, puis $y = [(2-2t)z - 3] \frac{1}{11}$ et $x = -\frac{1}{11} [(8+3t)z - 12]$,
 c-à-d $y = [8z - 3] \frac{1}{11}$ et $x = -\frac{1}{11} [-z - 12] = \frac{1}{11} [z + 12]$.

L'ensemble des solutions est donc la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ passant par le point $\begin{pmatrix} 12/11 \\ -3/11 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou aussi le point (prendre $z=10$) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Remarque : si $t = -3$, la troisième équation est obtenue en retranchant les deux premières, et l'on constate que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 7x - 3y + tz = 29 \\ 70x + 2y + 5z = t \\ 19x + y + 16z = 41 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 7 & -3 & t & 29 \\ 70 & 2 & 5 & t \\ 19 & 1 & 16 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 64 & 0 & t+48 & 152 \\ 32 & 0 & -27 & t-82 \\ 19 & 1 & 16 & 41 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 64x + (t+48)z = 152 \\ 32x - 27z = t-82 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{pmatrix} 64 & t+48 & 152 \\ 0 & t+102 & -2(t-158) \end{pmatrix} \quad \text{Deux cas :}$$

(a) $t = -102$: et alors le système entraîne $0 = 520$. (!) Aucune solution

(b) $t \neq -102$: et alors $z = \frac{-2t-158}{t+102}$ puis $x = \frac{2t^2 - 68t + 236}{64(t+102)} =$

$\frac{t^2 - 34t + 168}{32(t+102)}$ et enfin $y = 41 - 19x - 16z = \frac{-19t^2 + 2982t - 31160}{32(t+102)}$

$$\begin{cases} x+y=2t \\ -x+2y+z=4 \\ 4x+y-z=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2t \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}} \quad (23)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 3 & 1 & 2t+4 \\ 0 & -3 & -1 & 2-8t \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 3 & 1 & 2t+4 \\ 0 & 0 & 0 & 6(1-t) \end{array} \right)$$

Deux cas, bien sûr : $t=1$. Auquel cas le système initial équivaut à

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 3y+z=6 \end{cases} \quad \text{et donc une infinité de solutions,} \quad \left\{ (2-y, y, 6-3y) \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

$t \neq 1$. Et il n'y a aucune solution.

Exercice 7.1. Commençons par le dernier système.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} 2x+3y=0 \\ -5y=0 \\ -3y=0 \end{cases} \quad \text{càd } x=y=0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{mêmes opérations}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & -3 & 12 \end{array} \right), \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2x+3y=4 \\ -5y=12 \\ -3y=12 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

Le troisième système n'a pas de solution.

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x+7y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} \quad (\text{cf exercice 7.2}), \quad \text{càd}$$

$$x = \frac{28}{5} \quad \text{et} \quad y = -\frac{12}{5}. \quad \text{Donc} \quad 4x+y=20.$$

Ainsi le premier système n'a pas de solution et le deuxième la seule solution

$$\left(\frac{28}{5}, -\frac{12}{5} \right).$$

Exercice 7.2. Les droites D et D' ont pour vecteurs directeurs respectifs $(-b, a)$ et $(-b', a')$; dire qu'elles ne sont pas parallèles c'est dire que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre k non nul tel que $(-b', a') = k(-b, a)$. Montrons qu'alors $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Supposons le contraire, càd $ab' = ba'$.

On constate que dans ce cas : $(-b', a') = \frac{b'}{b}(-b, a)$ si $b \neq 0$ et

(24)

$$(-b', a') = \frac{a'}{a} (-b, a) \text{ si } b=0 \text{ car dans ce cas } ab'=0 \text{ et } a \neq 0 \text{ donc } b'=0.$$

Pour ce qui est du reste de l'énoncé, c'est maintenant à toi d'y répondre.

En effet $a \frac{\Delta x}{\Delta} + b \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{a(cb' - c'b) + b(ca' - ac')}{ab' - a'b} = \frac{c(ab' - a'b)}{ab' - a'b} = c.$

et de même

$$a' \frac{\Delta x}{\Delta} + b' \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{a'(cb' - c'b) + b'(ca' - ac')}{ab' - a'b} = \frac{c'(ab' - a'b)}{ab' - a'b} = c'$$

Exercice 73. Le système (S) est sans solution puisque L_1 et L_3 entraînent $x=y=z$ ce qui est incompatible avec L_2 . Le système (S') n'est pas équivalent au système (S) : pourquoi ? Tout simplement parce que les opérations $L_1 + L_2$ et $L_1 + L_3$ donnent ^{bien} deux contraintes, mais comme $(L_1 + L_2) - (L_1 + L_3) = L_2 - L_3$, la troisième ligne ($L_2 - L_3$) de (S') est une implication des deux autres : en fait, (S') n'a plus trois lignes indépendantes mais seulement deux. De fait, (S') a une infinité de solutions.

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ z - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1 + z, z, z).$$

Mais z est quel conque...

Exercice 74.
$$\begin{cases} 3x - 2y - z = a \\ 2x - 5y - 2z = b \\ -5x - y + 2z = c \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & a \\ 2 & -5 & -2 & b \\ -5 & -1 & 2 & c \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & +0 & -5 & a-2c \\ 27 & 0 & -12 & b-5c \\ -5 & -1 & 2 & c \end{array} \right) \quad \begin{cases} 13x - 5z = a - 2c \\ 27x - 12z = b - 5c \end{cases} \quad \text{càd}$$

$$(x, z) = -\frac{1}{21} \left(\begin{array}{cc|cc} a-2c & -5 & 13 & a-2c \\ b-5c & -12 & 27 & b-5c \end{array} \right)$$

càd

$$(x, z) = -\frac{1}{21} (-12a + 5b - c, -27a + 13b - 11c).$$

$$\text{Et } y = -5x + 2z - c = -\frac{1}{21} (6a + b + 4c).$$

(S) s'écrit aussi : $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On constate donc que (S) a une solution (unique d'ailleurs) pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 75.

Chacun des systèmes du texte définit bien une droite ; en effet, (25)
 leurs vecteurs normaux (je veux dire d'une part aux plans d'équation
 $x+2y+2z=2$ et $3x-2y-z=5$, d'autre part aux plans
 $2x-5y+3z=-4$ et $x+4y+6z=0$, de même pour le deuxième système)

ne sont pas colinéaires. En effet: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$
 et $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Ainsi, les deux plans du premier système ne sont pas parallèles ; de même pour le deuxième système. Ces plans (du premier système) sont donc sécants de même pour le deuxième système. Nous obtenons donc deux droites, respectivement ensemble des solutions du premier (deuxième) système. Sont-elles sécantes ? Deux façons de voir sont proposées ici :

(a) Résoudre le système $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$ pour voir s'il a une solution.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 8L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} x+2y+2z=2 \\ y+2z=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

càd $(x, y, z) = (2, 1, -1)$. La réponse est donc positive: les droites sont sécantes.

(b) (Plus bizarre). Trouver les deux droites, constater qu'elles ne sont pas parallèles mais qu'elles sont coplanaires (càd qu'elles définissent un plan, le seul qui les contient toutes deux).

On empiète un peu sur l'exercice suivant...

$$\begin{cases} x+2y=2-2z & (1) \\ 3x-2y=z+5 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)+(2): 4x=7-z \text{ c\`ad } x=\frac{1}{4}(7-z) \\ \text{puis} \\ y=\frac{1}{2}(2-2z-x) \text{ c\`ad } y=\frac{1}{8}(1-7z) \end{cases}$$

Δ_1 est une droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$, ou mieux $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$. Δ_1 passe par (faire $z=-1$) le point $(2, 1, -1)$.

On obtient de la m\^eme fa\^con que Δ_2 est la droite de vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} 42 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix} \text{ passant par } (2, 1, -1). \quad [!]$$

\^Evidemment c'est fini mais pour "jouer le jeu" prenons un autre point, p
exemple $(-\frac{16}{13}, \frac{4}{13}, 0)$. Il suffit de montrer que, notant $A = (2, 1, -1)$,
 $B = (-\frac{16}{13}, \frac{4}{13}, 0)$: le triplet $(\overrightarrow{AB}, \begin{pmatrix} -1/4 \\ -7/8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ou mieux } \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix})$
n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, une petite technique existe pour aller

vite : calculer le nombre $\begin{vmatrix} -\frac{42}{13} & 2 & 42 \\ -\frac{9}{13} & 7 & 9 \\ 1 & -8 & -13 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$

("m\^ethode de Sarrus")

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & & & -\frac{42}{13} & 2 & & 42 & & & \\ & & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ & & & & 7 & & 9 & & & \\ & & & -\frac{9}{13} & & & & & & \\ & & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ & & & & -8 & & -13 & & & \\ & & & 294 & 1 & & -8 & & -13 & 294 \\ & & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ & & & 3024/13 & -\frac{42}{13} & & 2 & & 42 & 3024/13 \\ & & & 18 & -\frac{9}{13} & & 7 & & 9 & 18 \\ & & & \hline & & & 7080 & & & & & & 7080 \\ & & & 13 & & & & & & 13 \end{array}$$

\^egaux :

le nombre en question est nul.
C'est exactement ce qu'il fallait

Exercice 76 - $\begin{cases} x+2y+2z=2 & (1) \\ 3x-2y-z=5 & (2) \end{cases} \begin{cases} 0+2(-6)+2(7)=2 & (1') \\ 3(0)-2(-6)-(7)=5 & (2') \end{cases}$

Pourstrayons membre \`a membre $(1)-(1')$ et $(2)-(2')$.

$$\begin{cases} x+2(y+6)+2(z-7)=0 \\ 3x-2(y+6)-(z-7)=0 \end{cases} \text{ c\`ad que } (x, y, z) \text{ est solution de } (S) \\ \text{si et seulement si } (x, y+6, z-7) \text{ l'est de } (S_0)$$

Exercice 77.

(27)

$$\begin{cases} 2x - y - z - t = -1 \\ x - 3y + z + t = -2 \\ x + y - 2z + 4t = 4 \\ x - y + z - 2t = -8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 &\leftarrow 5L_2 - 2L_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & -36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \\ L_4 &\leftarrow \frac{1}{3}L_4 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = -2 \\ 2y - 3t = -6 \\ z - 3t = -6 \\ 3t = 0 \end{cases}$$

car $t = 0$ puis $z = -6$, $y = -3$ et $x = -5$.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ 4x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 4L_1 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La dernière équation s'écrit maintenant $0 = 4$. Aucune solution donc.

Exercice 78.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 &\leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-y+z = -6 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \text{ et donc } x = -1. \text{ Ainsi } \mathcal{S} = \{(-1, 2, -3)\}.$$

$P(x) = ax^2 + bx + c$ et $P(-1) = -6$, $P(1) = -2$, $P(2) = -3$ entraînent que

$$\begin{cases} a - b + c = -6 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -3 \end{cases} \text{ . Ainsi } P(x) = -x^2 + 2x - 3.$$

Exercice 79. De même que dans l'exercice précédent, $\begin{cases} a - b + c = 19 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 19 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 19 \\ 0 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 6 & -3 & -72 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 19 \\ 0 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & -3 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 19 \\ 2b = -17 \\ -3c = -21 \end{cases} \text{ c.à.d.}$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{17}{2}, 7\right) \text{ . Ainsi } f(x) = \frac{7}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + 7.$$

Exercice 80. $F(0) = -a - \frac{1}{2}b$ et $F(-1) = -\frac{4}{2}a - \frac{1}{3}b$. Ne reste à constater que $F(0) = \frac{1}{2}$ et $F(-1) = 0$. Pour le mignon système sur (a, b) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ et donc } (a, b) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-2, 3).$$

$$\text{Ainsi } F(x) = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}.$$

Remarque : $a = \frac{x+1}{2x-3} \Big|_{x=1}$ et $b = \frac{x+1}{2x-3} \Big|_{x=2}$
("résidus de Cauchy").

Exercice 81. D'abord $(x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$ pour tout x .

Ensuite si a et b existent : $F(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{3x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1} - \frac{1}{x+1} =$

$$\frac{3x^2-3x+2-(x^2+1)}{x^3-x^2+x-1} = \frac{2x^2-3x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{2(x-1)(x-\frac{1}{2})}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2x-1}{x^2+1}$$

Ainsi $(a, b) = (2, -1)$. Mais quid de l'énoncé. Reprenons !

$$F(0) = -2 = -1 + b \text{ et } F(-1) = -2 = -\frac{1}{2} + \frac{-a+b}{2} \text{ et donc}$$

$b = -1$ puis $a = 2\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2$.

Exercice 82 $F(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} + \frac{c}{x - 1} \quad (x \neq 1)$

$$\begin{cases} F(-2) = -1 = \frac{-2a + b}{3} - \frac{1}{3}c \\ F(-1) = -1 = -a + b - \frac{1}{2}c \\ F(0) = -1 = b - c \end{cases}$$

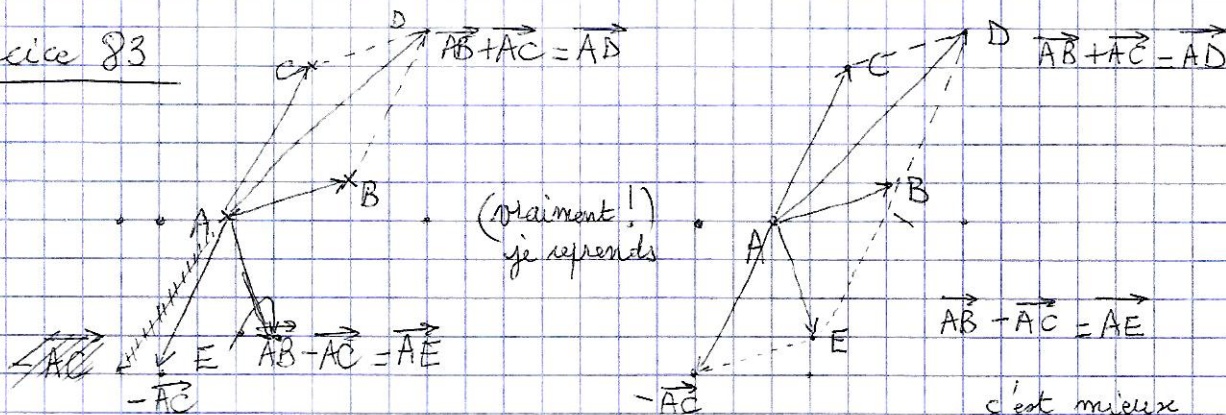
Cad le système du texte. La résolution ? $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

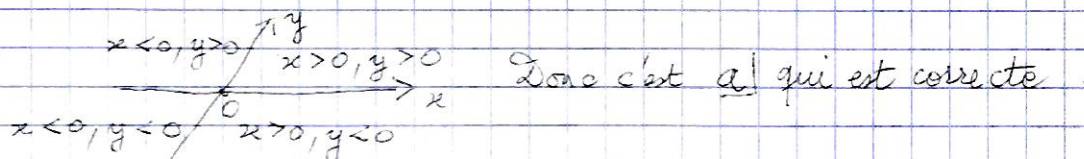
$$\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ -b = -1 \\ -c = -2 \end{cases} \text{ cad } b = 1 \text{ et } c = 2 \text{ puis } a = \frac{1}{2}(3 + 1 - 2) = 1.$$

Ainsi $F(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{x - 1}$.

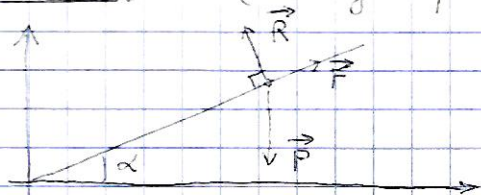
Exercice 83



Exercice 84



Exercice 85. (il n'y a pas de frottement car $\vec{R} \perp$ plan incliné)



on projette sur chaque axe l'égalité $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \|\vec{F}\| \cos \alpha + 0 + (-\|\vec{R}\| \sin \alpha) = 0 \\ -\|\vec{P}\| + \|\vec{R}\| \cos \alpha + \|\vec{F}\| \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Il reste un système à deux inconnues $\|\vec{F}\|$ et $\|\vec{R}\|$. $\begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = 0 \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = \|\vec{P}\| \end{cases}$ (note x) (note y)

Le déterminant du système = $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1$; $x = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \alpha \\ \|\vec{P}\| & \cos \alpha \end{vmatrix} =$

$$\|\vec{P}\| \sin \alpha \text{ et } y = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \|\vec{P}\| \end{vmatrix} = \|\vec{P}\| \cos \alpha. \text{ On en conclut que :}$$

L'abscisse de $\vec{R}$ est $-\|\vec{R}\| \sin \alpha$ c.à.d. $-\|\vec{P}\| (\cos \alpha) \sin \alpha$, l'ordonnée de $\vec{R}$ est $\|\vec{R}\| \cos \alpha$, c.à.d. $\|\vec{P}\| \cos^2 \alpha$. L'abscisse de $\vec{F}$, $x \cos \alpha$, est $\|\vec{P}\| (\sin \alpha) \cos \alpha$ et son ordonnée, $x \sin \alpha$, est $\|\vec{P}\| \sin^2 \alpha$. vérifions ceci dans la mesure du possible.

Si $\alpha = 0$, on sait que $\vec{R} = -\vec{P}$ et $\vec{F} = \vec{0}$.
 Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on sait que $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{F} = -\vec{P}$. } c'est bien le cas.

Exercice 86. $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (-3, 6)$, $\vec{w} = (8, -\frac{25}{2})$

$(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires: $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ entraîne $\begin{cases} -3 = 2\alpha \\ 6 = \alpha \end{cases}$ n'a pas de solution.

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \text{ donne } \begin{cases} 8 = 2\alpha - 3\beta \\ -\frac{25}{2} = \alpha + 6\beta \end{cases} \text{ c.à.d. } (\alpha, \beta) = \frac{1}{\Delta} (\Delta_x, \Delta_y) \text{ avec}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 15, \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -\frac{25}{2} & 6 \end{vmatrix} = 48 - \frac{75}{2} = \frac{21}{2} \text{ et } \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -\frac{25}{2} \end{vmatrix} = -33.$$

C.à.d. $\alpha = \frac{7}{5}$ et $\beta = -\frac{11}{5} = -2,2$. on peut retrouver les coordonnées de $\vec{w}$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$, c.à.d. α et β , ainsi:

α est le seul nombre tel que $\vec{w} - \alpha \vec{u}$ (resp. $\vec{w} - \beta \vec{v}$) soit colinéaire à $\vec{v}$ (resp. $\vec{u}$).
 (resp. β)

$$\text{Donc } \vec{w} - \alpha \vec{u} = (8 - 2\alpha, -\frac{25}{2} - \alpha) = \lambda (-3, 6).$$

$$\begin{cases} 8 - 2\alpha = -3\lambda \\ -\frac{25}{2} - \alpha = 6\lambda \end{cases} \text{ et donc } -\frac{25}{2} - \alpha = -2(8 - 2\alpha), \text{ c.à.d. } \alpha = \frac{1}{5}(16 - \frac{25}{2}).$$

$$\text{De même } \begin{cases} 8 + 3\beta = 2\mu \\ -\frac{25}{2} - 6\beta = \mu \end{cases} \text{ et donc } 8 + 3\beta = 2(-\frac{25}{2} - 6\beta), \text{ c.à.d. } \beta = \frac{1}{15}(-25 - 8).$$

On retrouve évidemment les mêmes coordonnées.

Exercice 87. $\vec{u}(7, 10, -9)$, $\vec{v}(5, 6, -5)$ et $\vec{w}(1, -2, 3)$ forment une base de l'espace si et seulement si pour tout (a, b, c) , le système (Σ)

$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = (a, b, c)$ admet une et une seule solution. Or :