

$$\begin{cases} 7x + 5y + z = a \\ 10x + 6y - 2z = b \\ -9x - 5y + 3z = c \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & a \\ 10 & 6 & -2 & b \\ -9 & -5 & 3 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & a \\ 24 & 16 & 0 & b+2a \\ -30 & -20 & 0 & c-3a \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{cases} 24x + 16y = b+2a \\ -30x - 20y = c-3a \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 24 & 16 \\ -30 & -20 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En fait, (5) ne peut avoir de solution que si $-8(c-3a) = 10(b+2a)$.

Si ce n'est pas le cas, (5) n'a pas de solution, autrement dit (Σ) n'en a pas.

Par conséquent, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. En fait, une équation du plan qu'ils engendrent est précisément $-8(z-3x) = 10(y+2x)$. En simplifiant : $2x - 5y - 4z = 0$.

Mais voici deux puces à l'oeille : $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

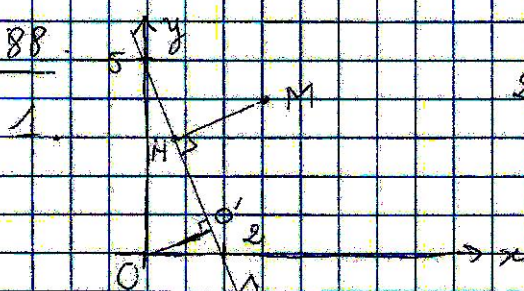
et (technique de la page 26) :

$$\begin{array}{ccccccc} & 7 & 10 & -9 & & & \\ & & \swarrow & \searrow & & & \\ & 5 & & 6 & & -5 & \\ & & \swarrow & \searrow & & & \\ -54 & 1 & -2 & 3 & 126 & & \\ & & \swarrow & \searrow & & & \\ & 70 & 7 & 10 & -9 & 90 & \\ & & \swarrow & \searrow & & & \\ 150 & 5 & 6 & -5 & -50 & & \\ \hline 166 & & & & & 166 & \\ 1 & & & & & 1 & \end{array}$$

égaux.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 88.



2. $(M=0)$ $O'(2\mu, 5(1-\mu))$ car $O' \in \Delta$

$\vec{OO'} \cdot (2, -5) = 4\mu - 25(1-\mu) = 0$

↓
produit scalaire

$\mu = \frac{25}{29}$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \Leftrightarrow \exists \mu$ tel que $\frac{x}{2} = \mu$ et $\frac{y}{5} = 1-\mu$

Un vecteur directeur de Δ est $(2, -5)$

$O'(\frac{50}{29}, \frac{20}{29})$

3. Pour un point M en général, la démarche est la même.

(32)

$$H(2\mu, 5(1-\mu)) \text{ et } \overrightarrow{MH} \cdot (2, -5) = 0 \text{ c.à.d.}$$

$$2(2\mu - a) - 5(5(1-\mu) - b) = 0, \text{ c.à.d. :}$$

$$\mu = \frac{1}{29} (2a - 5b + 25)$$

Et bien sûr $H\left(\frac{2}{29}(2a - 5b + 25), \frac{5}{29}(-2a + 5b + 4)\right)$.

Exercice 89

1. $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = (-1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 1) = 1$

3. (P) , une équation (k une constante non nulle bien sûr),

$$(a, b, c) = (-1, 0, 1) \text{ convient.}$$

En fait, M appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0$ c.à.d.

$$(x+1)(-1) + (y-0)0 + (z-0)(1) = 0, \text{ c.à.d. } z = x+1.$$

Exercice 90

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$;

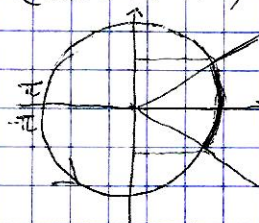
$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$
; $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
; $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \tan\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$

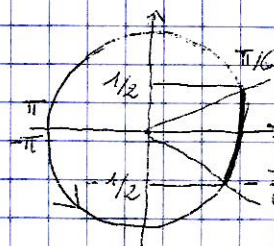
$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\cos x \sin x$ et donc le résultat

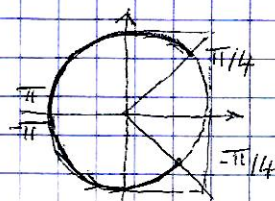
3.



$$S_1 = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$$



$$S_2 = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$$



$$S_3 = \left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$$

4. $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ par les formules du cours page 49.

Reste à poser $a+b = p$ et $a-b = q$.

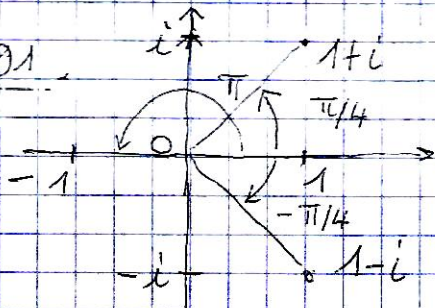
Pour l'égalité suivante, soustraire au lieu d'additionner les deux premières formules de la page 49 en haut.

(c) Additionner les deux dernières formules de la page 49

(d) Soustraire!

Exercice 91.

(33)



$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$1-i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$\text{et } i = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}), -i =$$

$$1(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$$

Exercice 92.

$$-1 + i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) ; \text{ son argument est } \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \text{son module} & & \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ & \cos(\frac{2\pi}{3}) & \end{array}$$

Exercice 93. $Z^2 = 3 - 4i$; une habitude minimale donne aussitôt

$$(2-i)^2 = 3 - 4i \text{ mais alors } -y. Z = a + ib.$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \quad (= |Z^2| = |Z|^2) \\ a^2 - b^2 = 3 \quad (= \operatorname{Re}(Z^2)) \end{cases} \text{ et } 2ab = -4 < 0$$

$$\downarrow \operatorname{Im}(Z^2)$$

Additionnant et soustrayant membre à membre :

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ et } ab < 0. \text{ Donc deux couples opposés } \pm (2, -1)$$

$$\text{Ainsi } Z = \pm (2 - i).$$

Exercice 94. J'ai ici une question : comment l'auteur de l'exercice définit-il e^z ?

Si z est imaginaire pur, c'est fait page 55 mais sinon ? Je vais donc définir e^z comme étant $e^a e^{ib}$ (où a et b sont réels, et $z = a + ib$). Cela revient pratiquement à supposer la formule que l'on veut démontrer !

$$e^z e^{z'} = e^a e^{ib} e^{a'} e^{ib'} = e^{a+a'} e^{i(b+b')} \quad [\text{page 56 en haut}]$$

$$\text{càd } e^z e^{z'} = e^{a+a'} e^{i(b+b')} = e^{z+z'} \text{ puisque } z+z' = (a+a') + i(b+b').$$

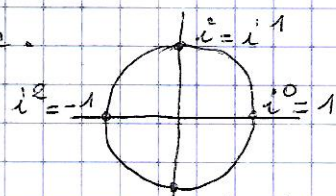
$$[\text{en fait l'égalité se montre souvent en posant } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}]$$

Pour l'autre égalité : on prend $w = -z$ dans la première.

$$e^z e^{+w} = e^{z-z} = e^0 = 1 \text{ donc } e^{-z} = \frac{1}{e^z} \text{ pour tout } z.$$

Puis $\frac{e^z}{e^w} = e^z e^{-w} = e^{z-w}$ la 1^{ère} égalité à nouveau (pour tous nombres complexes z et w).

Exercice 95. a.



$$\text{ainsi } i^n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0(4) \\ i & n \equiv 1(4) \\ -1 & n \equiv 2(4) \\ -i & n \equiv 3(4) \end{cases}$$

b. $\frac{1+2i}{2+i}$ (1 et 2 permutes) vaut $\frac{(1+2i)(2-i)}{5}$ càd $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

c. $(2+3i)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 2^{3-k} i^k = 2^3 i^0 + 3 \cdot 2^2 i^1 + 3 \cdot 2^1 i^2 + 1 \cdot 2^0 i^3$

$$\text{càd } (2+3i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i.$$

vérification rapide, simplement des modules : $13^{3/2} \stackrel{?}{=} \sqrt{125}$. Échec de la mission ! j'avais oublié le "3" de $3i$. Je repends.

$$(2+3i)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 2^{3-k} 3^k i^k = 8 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot (-1) + 27(-i), \text{ càd}$$

$$(2+3i)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i.$$

vérification rapide : $13^{3/2} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-46)^2 + 81} = \sqrt{2116 + 81} = \sqrt{2197}$

Mettons au carré : 13^3 , càd 2197... C'est bon.

d. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$; on peut réduire au même dénominateur ou aussi

remarquer que les deux nombres ajoutés sont conjugués, leur somme est deux fois leur partie réelle commune ($z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$). Or, $\frac{2+5i}{1-i} = \frac{(2+5i)(1+i)}{2}$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i. \text{ Ainsi le nombre cherché vaut } 2(-\frac{3}{2}) \text{ càd } -3.$$

Exercice 96. $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ (module 2, argument $\frac{\pi}{3}$).

$$-\sqrt{6} + i\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) \text{ càd}$$

$$-\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \right) : \text{argument } \frac{5\pi}{6} \text{ et module } 2\sqrt{2} \quad (35)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$(1-i)(\sqrt{3}-i) \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \text{ a pour module } 2\sqrt{2}, \text{ pour argument}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{module 1, argument } \frac{\pi}{5}}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \quad 2e^{-i\pi/6} \quad -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{5} = -\frac{13\pi}{60}$$

$$(\text{ppcm}(4,6,5) = 60)$$

Enfin, $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^4$ (surtout ne pas développer cette chose) :

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \text{ et } 1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \text{ donc le quotient vaut}$$

$$\sqrt{2}e^{i\pi/2} \text{ et le nombre demandé a pour module } (\sqrt{2})^4 \text{ c'ad } 4 \text{ et}$$

$$\text{pour argument } \frac{7\pi}{12} \times 4, \text{ c'ad } \frac{7\pi}{3} \text{ ou encore } \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 97. On voit que $(1-i\sqrt{3})^n = \left(2e^{-i\pi/3} \right)^n = 2^n e^{-ni\pi/3}$.

$$\downarrow \quad \downarrow$$

conjugué de $1+i\sqrt{3}$ Moins

Le nombre sera donc imaginaire pur si et seulement si

$$-n\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour un } k \text{ entier relatif}$$

(non argument)

$$\text{et donc } -2n\pi = 6k+3. \text{ Mais alors } \pi = -\frac{6k+3}{2n}$$

serait rationnel ! Le nombre en question ne peut donc jamais être imaginaire pur.

Reel négatif ? Cela sera si et seulement si $-\frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi$ pour un k entier bien entendu $n = -3(2k+1)$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Mais n doit être positif, ce qui exige k négatif. On obtient donc :

$$n = 3 \text{ ou } n = 9 \text{ ou } n = 15, \text{ De manière générale, on obtient}$$

les nombres de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison

$$6. \text{ La vérification est immédiate : } (1-i\sqrt{3})^{3+6k} = \dots$$

$$2^{3+6k} e^{-(3+6k)i\frac{\pi}{3}} = 2^{3+6k} (-1) = -2^{3+6k}.$$

(36)

Exercice 98. $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{2e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$ et aussi: $\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2}$ cad

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i. \text{ Ainsi } (e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta) \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Exercice 99. $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$.

$(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5$ vaut $(2\cos\theta)^5$ cad $32\cos^5\theta$ mais aussi:

$$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} e^{i(5-k)\theta} e^{-ki\theta} \text{ cad } e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta},$$

soit (en regroupant deux à deux)

$$2\cos(5\theta) + 10\cos(3\theta) + 20\cos\theta.$$

Ainsi, $\cos^5\theta = \frac{1}{16}(\cos(5\theta) + 5\cos(3\theta) + 10\cos\theta)$

Exercice 99.100. $e^{5i\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (\cos\theta)^{5-k} (i\sin\theta)^k,$

cad

$$e^{5i\theta} = \cos^5\theta + 5\cos^4\theta(i\sin\theta) + 10\cos^3\theta(-\sin^2\theta) + 10\cos^2\theta(-i\sin^3\theta) + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta.$$

Mais $e^{5i\theta} = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$ et donc (égalité des parties réelles):

$$(1\theta) \cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta.$$

Exercice 100.101. $1+e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} + e^{ix/2}) = 2\cos(\frac{x}{2})e^{ix/2}.$

Reste à voir quand $\cos\frac{x}{2} \geq 0$. C'est bien sûr quand $\frac{x}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

cad quand $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi]$, ensemble noté I .

Au total, si $x \in I$: le module vaut $2\cos(\frac{x}{2})$ et l'argument $\frac{x}{2}$.

[éventuellement le nombre peut être nul].

et si $x \notin I$, le module vaut $-2\cos(\frac{x}{2})$ et l'argument $\frac{x}{2} + \pi$.

Exercice 102. $z^3 = 8i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ pour $k=0, 1$ ou 2 .

$\text{Càd } z = \underbrace{2}_{z_1} e^{i\pi/6} \text{ ou } z = \underbrace{2}_{z_1 j} e^{5i\pi/6} \text{ ou } z = \underbrace{2}_{z_1 j^2} e^{3i\pi/2} \text{ . Ou encore :}$

37

$z = z_1 = \sqrt{3} + i \text{ ou } z = z_2 = -\sqrt{3} + i \text{ ou } z = z_3 = -2i \text{ .}$

$4z^4 = -i, z^4 = -\frac{1}{4}i = \frac{1}{4}e^{3i\pi/2} \text{ . Donc } z = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} e^{i(\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})}, \text{ ou } k=0,1,2,3$

Ainsi $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{3i\pi/8} \text{ ou } \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{7i\pi/8}$.

$(z+1)^4 = -16 \text{ càd } (z+1)^4 = 16e^{i\pi} \text{ càd } z = -1 + 2e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}, \text{ ou } k=0,1,2,3$

ainsi $z = -1 + 2e^{i\pi/4} \text{ ou } z = -1 + 2e^{3i\pi/4} \text{ ou } z = -1 + 2e^{5i\pi/4} \text{ ou}$

$z = -1 + 2e^{7i\pi/4}$. C'est-à-dire : $z = \pm (-1 + 2e^{i\pi/4}) \text{ ou}$

$z = \pm (-1 + 2e^{3i\pi/4})$.
 Faux

$z = -1 \pm 2e^{i\pi/4} \text{ ou } z = -1 \pm 2e^{3i\pi/4}$. Soit encore :

$z = -1 \pm 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = (-1 \pm \sqrt{2}) \pm i\sqrt{2} \text{ ou } z = -1 \pm 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) =$
 $(-1 \mp \sqrt{2}) \pm i\sqrt{2}$.

Exercice 103. $z^3 = 1 = e^{i(0)} \Leftrightarrow z = e^{\frac{2i\pi k}{3}}$ pour $k=0,1,2$, càd

$z = 1 \text{ ou } z = j = e^{2i\pi/3} \text{ ou } z = j^2 = e^{4i\pi/3}$. On voit aussitôt que $j \neq j^2$.

Ensuite $j = e^{-2i\pi/3} = \underbrace{e^{2i\pi}}_{=1} e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3} = j^2$.
 donc

Enfin $j^3 - 1 = (j-1)(1+j+j^2) = 0$ or $j \neq 1$ et effectivement $1+j+j^2 = 0$.

Exercice 104. $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = 4e^{i\pi}$ donc $z = \sqrt{4} e^{i(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$ pour $k=0$ ou 1 , càd

$z = 2i \text{ ou } -2i$.

$z^2 = -3$ mène de même à $z = \pm i\sqrt{3}$.

$z^2 = 2i$ mène à $z = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)}$ pour $k=0$ ou 1 , càd

$z = \pm (1+i)$

$z^2 = 1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ mène à $z = 2^{1/4} e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)}$ pour $k=0$ ou 1 , càd

$z = \pm \sqrt[4]{2} e^{i\pi/8}$

$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i = 4e^{5i\pi/6}$ mène à $z = \pm 2e^{5i\pi/12}$.

Exercice 105. (oubli sur l'exercice précédent pour $z^2 = 3-4i$:

$$z = a + ib, \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = |z|^2 = |z^2| = |3 - 4i| = 5 \\ a^2 - b^2 = \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(3 - 4i) = 3 \text{ et } 2ab = \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(3 - 4i) < 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow (a^2, b^2) = (4, 1) \text{ et } ab < 0 \Leftrightarrow (a, b) = \pm(2, -1). \text{ Donc}$$

$$z = \pm(2 - i). \quad [\text{c'était l'exercice 93}]$$

$$z^2 - 5iz + 7 - i = 0. \quad \Delta = (-5i)^2 - 4(-7 + i) = 3 - 4i. \quad S = 2 - i$$

$$\text{Les deux solutions de l'équation sont } \frac{5i \pm (2 - i)}{2} \text{ c\`ad } -1 + 3i \text{ et } 1 + 2i.$$

$$z^2 + 2iz\sqrt{2} - 2(1 + i) = 0. \quad \Delta = (2i\sqrt{2})^2 - 4(-2(1 + i)) = 8i. \quad S = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$\text{Les deux solutions de l'équation sont cette fois: } \frac{-2i\sqrt{2} \pm 8}{2}, \text{ c\`ad } \begin{aligned} & \frac{-2i\sqrt{2} \pm 2(1 + i)}{2} \text{ c\`ad } -1 - (1 + \sqrt{2})i \\ & \text{ou} \\ & 1 + (1 - \sqrt{2})i. \end{aligned}$$

$$S = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2(1 + i)$$

Exercice 106

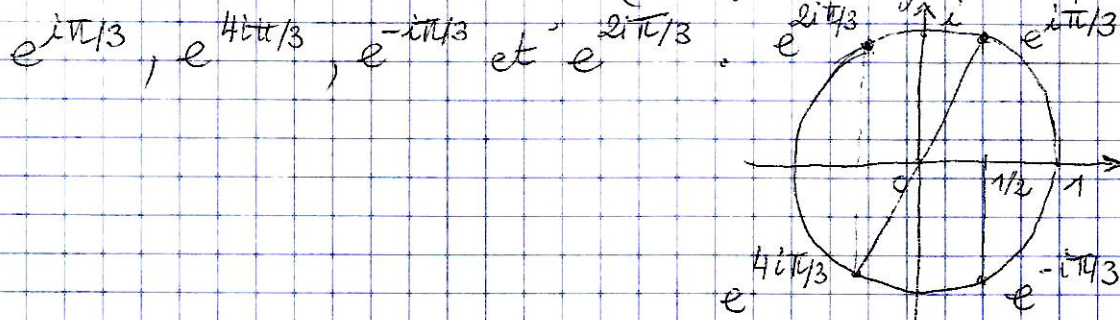
$$z^2 + z + 1 = 0. \text{ On connaît les deux solutions } (j \text{ et } \bar{j}) \text{ par l'exercice 103, mais jouons le jeu. } \Delta = -3, \quad S = i\sqrt{3}. \text{ Les deux solutions sont } \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$z^2 + 2z + 5 = 0. \quad \text{Ici } \Delta = -16, \quad S = 4i. \text{ Les deux solutions (conjugués bien entendu) sont } \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Exercice 107

Les deux solutions sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ c\`ad $e^{\pm 2i\pi/3}$.

Pour l'équation $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$, il suffit de poser $Z^2 = z$. Ainsi il suffit de trouver les racines carrées de $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$. On obtient naturellement $\pm e^{i\pi/3}$ et $\pm e^{-i\pi/3}$ c\`ad (sous forme "trigonométrique") :



Exercice 108. $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$. ^{petits}

Cherchons une solution "réelle", du côté des entiers par exemple ! -1 convient.

Donc $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$ est divisible par $z - (-1) = z + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i & z + 1 \\
 \hline
 z^3 + z^2 & z^2 - 3z + 3 - i \\
 \hline
 -3z^2 - iz + 3 - i & \\
 -3z^2 - 3z & \\
 \hline
 (3-i)z + 3 - i & \\
 (3-i)z + 3 - i & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Ainsi: $(z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i) = (z + 1)(z^2 - 3z + 3 - i)$

Il reste plus qu'à résoudre $z^2 - 3z + (3 - i) = 0$

pour avoir les deux autres solutions de l'équation

initiale: il y en a en effet forcément trois.

$\Delta = (-3)^2 - 4(3 - i) = -3 + 4i$, pas un carré!

$S = i(2 - i) = 1 + 2i$. donc les deux solutions cherchées sont

$\frac{3 \pm (1 + 2i)}{2} = 1 - i$ ou $2 + i$.

Ainsi les trois solutions sont -1 , $1 - i$ et $2 + i$.

vérification rapide: la somme de ces trois nombres doit être l'opposé du coefficient en z^2 , c'est-à-dire doit valoir 2. C'est bien le cas.

• $z^4 + (-4 + 3i)z^2 + 7 - i = 0$. Il suffit de résoudre l'équation $z^2 + (-4 + 3i)z + 7 - i = 0$ puis de trouver les racines carrées des solutions trouvées. Cela fournira ^{deux} quatre solutions à l'équation initiale.

$\Delta = (-4 + 3i)^2 - 4(7 - i) = -21 - 20i$. $\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29 \\ a^2 - b^2 = -21 \text{ et } ab < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 = 4$ et $b^2 = 25$ et $ab < 0$. Donc $(a, b) = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $S = 2 - 5i$ (par exemple). Ainsi les deux solutions de l'équation du second degré sont $\frac{4 - 3i \pm (2 - 5i)}{2}$, soit $1 + i$ ou $3 - 4i$.

Reste à trouver les racines carrées de $1 + i$ comme de $3 - 4i$.

• Tenons-les! (exercice 104). On obtient finalement les quatre solutions

$\pm \sqrt[4]{2} e^{i\pi/8}$ et $\pm (2 - i)$.

(40)

Une vérification rapide (sommes symétriques de Newton) consiste à vérifier que le produit de ces quatre nombres vaut $7-i$. Or ce produit vaut :

$$+ \sqrt{2} e^{i\pi/4} (2-i)^2, \text{ c'ad } (1+i)(3-4i). \text{ C'est parfait.}$$

Exercice 109 - 1. $z^5 = 1$ a cinq solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont $e^{2ik\pi/5}$, où $k = 0, 1, 2, 3$ ou 4 .

2. Il suffit de remarquer que $z^5 = 1 \Rightarrow |z|^2 = z\bar{z} = 1$.

3. Il suffit de constater que $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$ et que $z-1 \neq 0$. Pour l'autre égalité, on a :

$$z^4 = \frac{1}{z} = \bar{z}, \quad z^3 = \frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2 = \bar{z}^2.$$

4. Donc $z = e^{i\theta}$. On en déduit $z^2 + \bar{z}^2 = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2\cos(2\theta)$ et $z + \bar{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Mais $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. D'où le résultat demandé.

Enfin : $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$ (question 3.) et donc $\cos\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$, c'ad $\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Comme $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est solution, on peut remplacer

θ par $\frac{2\pi}{5}$ pour obtenir que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ vaut soit $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ soit $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Le choix est vite fait : $\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est nécessairement > 0 .

$$\text{Au total } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}.$$

Exercice 110 f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = e^x + \frac{2}{x} + \sin x$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x$.

Exercice 111. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = (\sin)'(0) = \cos 0 = 1$.
↓
 car $\sin$ est dérivable en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = (\cos)'(0) = -\sin 0 = 0$.
↓
 car $\cos$ est dérivable en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = (\ln(1+x))'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$.
↓
 car $\ln(1+x)$ est dérivable en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = (e^x)'(0) = e^0 = 1.$$

↓
car exp est dérivable en 0

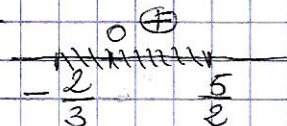
Exercice 112. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, g sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et h sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

↓ $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
car $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$

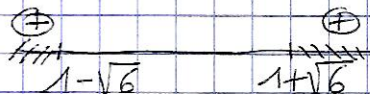
Puis $f'(x) = (-\sin x)e^{\cos x}$; $g'(x) = 2 \frac{\cos x}{\sin x}$; $h'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Exercice 113. f est définie là où $\frac{(2+3x)}{5-2x}$ est ≥ 0 .

Cad $D_f = \left[-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right]$.



g est définie si seulement si $x^2 - 2x - 5 \geq 0$ cad $x \in]-\infty; 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}; +\infty[$



h est définie là où $4x+3 > 0$ et seulement là. C'est-à-dire

$D_h = \left]-\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

Exercice 114. 1. La première n'a pas de limite en 0; la deuxième a au contraire une limite nulle en 0.

2. La première fonction est paire, bornée par 1 et sans limite en 0. Ce qui élimine la 2^{ème} fonction proposée (qui est impaire), la 3^{ème} (impaire aussi) et la 4^{ème} (impaire aussi). Quant à la 5^{ème}, elle a une limite nulle en 0 puisque

qui a une limite nulle en 0

$$\forall x \neq 0, \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \quad (\text{rappelons que } \forall \theta, |\sin \theta| \leq 1)$$

$$\forall x \neq 0, \left|x \cos \frac{1}{x}\right| \leq |x| \quad (\text{rappelons que } \forall \theta, |\cos \theta| \leq 1)$$

Ainsi, la 1^{ère} fonction dont on le graphe est $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Le deuxième graphe est celui d'une fonction impaire (graphe invariant par symétrie centrale autour de 0), de limite nulle en 0.

Il faut donc éliminer, outre évidemment la 1^{ère} fonction proposée, la 2^{ème} fonction

(qui n'a pas de limite en 0 : $\sin\left(1/\left(\frac{1}{k\pi}\right)\right) = \sin(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$\sin\left(1/\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$), la 3^{ème} fonction proposée $\left(\frac{\cos\left(1/(2k\pi + \frac{\pi}{2})\right)}{1/(2k\pi + \frac{\pi}{2})} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty, k \in \mathbb{Z}]{} \infty\right)$, la 4^{ème} fonction

(qui est paire) et la 6^{ème} (qui est paire aussi).

(42)

Ainsi, le deuxième graphe est celui de $x \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. f tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$ si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0$:

$$0 < |x| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

La négation de cette proposition est :

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \eta > 0 :$$

$$\exists x \text{ tel que } 0 < |x| < \eta \text{ et } |f(x)| \geq \varepsilon.$$

Ainsi, on sait que $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit donc $\eta > 0$. Prenons $x = \frac{1}{2k\pi}$ avec $2k\pi > \frac{1}{\eta}$ et $k \in \mathbb{Z}$ (càd

$$k \geq E\left(\frac{1}{\eta \cdot 2\pi}\right) + 1 \text{ et } k \text{ entier}).$$

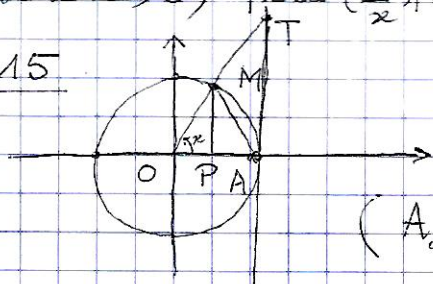
$$\text{On constate que } f(x) = |f(x)| = \cos(2k\pi) = 1.$$

On peut donc prendre par exemple $\varepsilon = 1$ ou $\frac{1}{2}$ etc...

4. Cette preuve a déjà été apportée plus haut : $\forall x \neq 0, \left|x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$.

Donc si $x \rightarrow 0$, $\left|x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \rightarrow 0$ càd $x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$.

Exercice 115



$$A_1 < A_2 < A_3 \quad (*)$$

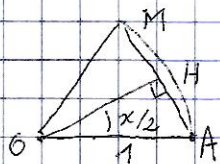
$$\left(A_2 = \iint_{\theta \in [0, x], r \in [0, 1]} r dr d\theta = \left(\int_0^x d\theta \right) \left(\int_0^1 r dr \right) = \frac{1}{2} x \right)$$

Mais admettons que l'aire de $\widehat{OAM}$ soit proportionnelle à x :

$$\underbrace{A(\widehat{OAM})}_{\text{aire de } \widehat{OAM}} = 0 \text{ si } x = 0 \text{ et } A(\widehat{OAM}) = \frac{\pi}{4} \text{ si } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } A_2 = \frac{1}{2} x.$$

2. On voit aussitôt que $A_1 = 2$ fois l'aire de $OHA = 2 \times \frac{OH \times HA}{2}$, càd



$$A_1 = 2 \times \underbrace{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{OH} \times \underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{AH} = \frac{\sin x}{2}.$$

Et que

$$A_3 = \frac{1}{2} OA \times AT = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x = \frac{1}{2} \tan x.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans (*).

3. Il suffit d'utiliser l'inégalité précédente, de la diviser par $\sin x$, pour

$$\text{obtenir } 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}. \text{ Reste à prendre les inverses.}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. L'«*théorème des gendarmes*» donne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
 Pour le cas $x \rightarrow 0$ et $x < 0$, on remarque simplement que c'est pair :
 la limite à droite de 0 entraîne une limite à gauche de 0.

Exercice 116

$$1. \frac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - 4x} \underset{x \neq 0}{=} \frac{3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 4} = \frac{3(x+2)(x+\frac{1}{3})}{(x-2)(x+2)} \underset{x \neq -2}{=} \frac{3x+1}{x-2}$$

D'où les limites demandées : («aux bornes»)

$$3 \text{ en } \pm \infty \text{ («termes de plus haut degré» } \frac{3x}{x} \text{)}, \frac{3 \times 0 + 1}{0 - 2} = -\frac{1}{2} \text{ en } 0,$$

$$\frac{3(-2)+1}{-2-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} \text{ en } -2; \text{ enfin, il n'y a pas de limite en } 2 \text{ mais}$$

une limite à gauche, $\frac{3 \times 2 + 1}{0_-} = -\infty$ et une limite à droite, $\frac{3 \times 2 + 1}{0_+} = +\infty$.

$$2. \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{4x^2 - (4x^2 + 1)} \cdot \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= 1 \cdot \frac{2x + 2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}}{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \underset{x \neq 0}{=} \frac{2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2.$$

$$3. \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{x} \frac{(1+x) - (1-x)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \underset{x \neq 0}{=} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$4. \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \underset{x \neq 2}{=} \frac{x+2}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{4}{1} = 4.$$

$$5. \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(1+x) - (1+x^2)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} =$$

$$\frac{(1-x) \cdot \frac{1}{x} \underset{x \neq 0}{=} 1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

$$6. \frac{x^n - 1}{x^n - 1} = \frac{x^n - 1}{(x-1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k} \underset{x \neq 1}{=} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{n}.$$

Exercice 117.

(44)

On a vu plus haut que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\frac{1}{x})$ existe et vaut 0 : le prolongement par continuité en question existe bien par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 118.

$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x = 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$. f est polynômiale sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Comme telle, elle y est continue.

Elle sera donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est en 0. Or :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = b.$$

Les triplets (a, b, c) cherchés existent donc ; ce sont tous les triplets $(a, 0, c)$, où a et c sont totalement quelconques.

Exercice 119. f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ comme fonction polynômiale sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, et par la continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Elle sera donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est en -1 et en 1 , c.à.d. :

les limites à gauche comme à droite de f en -1 et 1 existent et valent respectivement $f(-1)$ et $f(1)$. Or : $\lim_{x \rightarrow -1, x < -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (ax^2 + bx + c) = a - b + c$.

$$\lim_{x \rightarrow -1, x > -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = 0 \quad \text{et} \quad f(-1) = a - b + c.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + bx + c) = a + b + c$$

$$\text{et} \quad f(1) = a + b + c.$$

Ainsi f sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \text{et} \\ a + b + c = 0 \end{cases}$ c.à.d.

$$b = 0 \text{ et } a = -c.$$

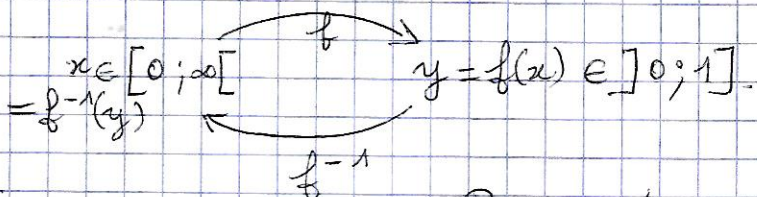
Exercice 120 - 1. (théorème 5.24 page 72). Il suffit de prouver que f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Or, elle y est continue comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$0 \leq x < y \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{1+y^2}. \quad \text{Et le résultat suit.}$$

2. f est donc bijective de $\mathbb{I}0; \infty[$ sur $]0; 1]$. Le même théorème assure que f^{-1} sera continue et strictement décroissante de $]0; 1]$ sur $[0; +\infty[$.

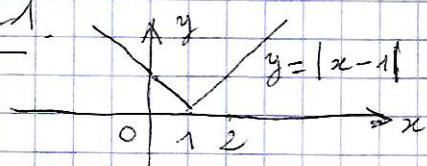
3. Soit donc $x \geq 0$ et $y = \frac{1}{1+x^2}$. On a : $x^2 + 1 = \frac{1}{y}$, soit $x^2 = \frac{1}{y} - 1$.

et $x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$. Ainsi $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$.



Par conséquent : $x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$.

Exercice 12.1.



$f : x \mapsto |x-1|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0, 1 et 2, car elle est la composée de deux

fonctions, $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto |x|$ qui le sont. Puis :

$\frac{|x-1| - |0-1|}{x-0} = \frac{|x-1| - 1}{x} \underset{\text{au voisinage de } 0}{=} \frac{-(x-1) - 1}{x} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1.$

d'où la dérivabilité de f en 0 avec $f'(0) = -1$.

$\frac{|x-1| - |1-1|}{x-1} = \frac{|x-1|}{x-1} = -1$ si $x < 1$ et 1 si $x > 1$, d'où la

"non-dérivabilité" de f en 1 car $f'_g(1) = -1 \neq f'_d(1) = 1$.

$\frac{|x-1| - |2-1|}{x-2} = \frac{|x-1| - 1}{x-2} \underset{\text{au voisinage de } 2}{=} \frac{(x-1) - 1}{x-2} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 1$, et donc la

dérivabilité de f en 2 avec $f'(2) = 1$.

Exercice 12.2. Tout d'abord, f est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ par la continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, celle des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$. De la même manière, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par la dérivabilité de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$ et celle des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$.

Reste la continuité de f en 1, la dérivabilité de f en 1 : la condition nécessaire et suffisante cherchée pour que f réponde à l'exigence