

Change of variable

12 January, 2021 14:50

$$u = ax + b$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x + 5\pi) dx = \frac{1}{3} \int_{5\pi}^{6\pi} \sin u du =$$

$$u = 3x + 5\pi$$

$$x = 0$$

$$u = 5\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$u = 6\pi$$

$$du = 3 dx$$

$$dx = \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} [-\cos u]_{5\pi}^{6\pi} = \frac{1}{3} (-1 - (+1)) = -\frac{2}{3}$$

$$u = f(x)$$

$$du = f'(x) dx$$

Ex 137

12 January 2021 14:13

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx$$

Si c'est $\sqrt{1-x^2}$ alors on

fait le changement $x = \sin u$

Pour amener $\sqrt{4-x^2}$ à $\sqrt{1-x^2}$

on utilise le changement affine

$$x = 2u \quad x = 1 \quad u = \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{1}{2}x \quad x = -1 \quad u = -\frac{1}{2}$$

$$dx = 2 du$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{4-4u^2} 2 du =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{1-u^2} 2 du = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-u^2} du =$$

$$u = \sin \varphi$$

$$\varphi = \arcsin u$$

$$du = \cos \varphi d\varphi$$

$$u = -\frac{1}{2} \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$u = \frac{1}{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - (\sin \varphi)^2} \cos \varphi d\varphi =$$

$$\sqrt{1 - (\sin \varphi)^2} = \sqrt{(\cos \varphi)^2} = |\cos \varphi|$$

Sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$ $\cos \varphi \geq 0$

$$|\cos \varphi| = \cos \varphi$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos \varphi)^2 d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \left[2\varphi + \sin 2\varphi \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

Fonction réciproque

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone

Alors $f(I) = J$ est un intervalle

$f: I \rightarrow J$ est une bijection

$\exists$ une fonction réciproque $g: J \rightarrow I$
 g est aussi continue, strictement monotone

Exemples de base

① $f(x) = x^2$ n'est monotone sur $\mathbb{R}$
 mais elle est monotone sur
 (croissante)

$$I = [0; +\infty[$$

$$f(I) = J = [0; +\infty[$$

$$f: [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$$

$$x \mapsto x^2$$

est continue & strictement croissante

la fonction réciproque

$$g: [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

② $f(x) = e^x$ strictement croissante
sur $I = \mathbb{R}$

$$f(I) = J =]0; +\infty[$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$$

$$x \mapsto e^x$$

continue, strictement croissante
la fonction réciproque est

$$g:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

Comment trouver la fonction réciproque

12 January, 2021 14:36

① résoudre en x l'équation

$$f(x) = y$$

on obtien $x = g(y)$

② échanger $x \leftrightarrow y$ $y = g(x)$

Exemple

$$f(x) = x^2 + x$$

f est strictement croissant sur

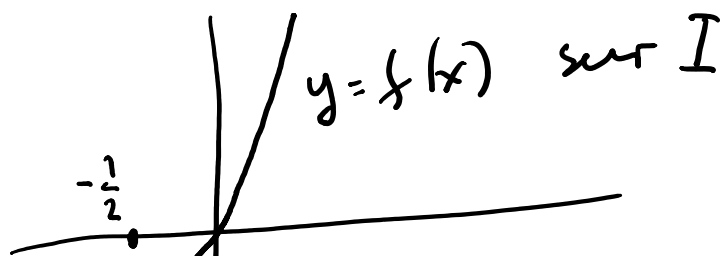
$$I = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

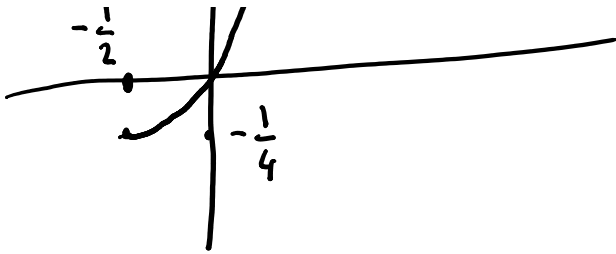
$$f(I) = J$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$J = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$$





$f: I \rightarrow J$ est une bijection

$g: J \rightarrow I$ la fonction réciproque

Comment trouver la formule pour g ?

$$x^2 + x = y \quad x^2 + x - y = 0$$

$$\Delta = 1 + 4y \quad x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2} \quad \text{ou}$$

$$y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[\quad x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4y}}{2}$$

$$\Delta \geq 0$$

On sait que $x \geq -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2}$$

Puis on échange $x \leftrightarrow y$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

la fonction
réciproque

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

$$f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

reciproque

147 (3)

12 January, 2021

14:48

$$y' - y = \sin x + 2 \cos x$$

① résoudre l'équation homogène

$$y' - y = 0 \quad y' = y$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \quad (\ln y)' = 1 \quad \frac{y'}{y} = (\ln y)'$$

$$\ln y = x + \ln C$$

$$y = e^{\ln y} = e^{x + \ln C} = C e^x$$

$y_h = C e^x$ la solution de l'équation homogène.

② 2 façons pour résoudre l'équation non homogène.

- la variation de la constante
 - "deviner" une solution particulière
-

On veut chercher une solution

particulière de $y' - y = \sin x + 2 \cos x$
de la forme $y = a \sin x + b \cos x$

$$y' = -b \sin x + a \cos x$$

$$y' - y = (a+b) \sin x + (-a+b) \cos x$$

$$y' - y = 1 \sin x + 2 \cos x$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ -a+b = 2 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ 2b = 3 \end{cases} \quad b = \frac{3}{2} \quad a = -\frac{1}{2}$$

Une solution particulière est

$$y_p = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{3}{2} \cos x$$

$$\text{Contrôle : } y' = -\frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

$$y - y' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \sin x + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \cos x$$

$$= \sin x + 2 \cos x \quad \underline{\underline{OK}}$$

③ la solution générale

$$y_{nh} = y_p + y_h$$

$$y_{nh} = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{3}{2} \cos x + c e^x$$

① $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

c'est une limite remarquable

② $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b \frac{\sin(x^2)}{x}, & x > 0 \end{cases}$

④ (a, b) t. g. f soit continue sur $\mathbb{R}$

⑤ (a, b) . . . dérivable . . .

f est continue et dérivable
sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

Étudions la continuité et la
dérivabilité en 0

② Continuité

f est continue en 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = 0$$

$$f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \sin(x^2)}{x} =$$

$$= b \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{\sin(x^2)}{x^2} = b \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2}{x^2} =$$

$$\boxed{x^2 = t \quad \begin{matrix} x \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow 0^+ \end{matrix}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\Rightarrow = b \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad f(0) = a \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$f \text{ est continue en } 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0$$

$$\{(a, b) : f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\} =$$

$$= \{ (0, b) : b \in \mathbb{R} \}$$

⑥ dérivabilité. La dérivabilité en 0 $\Rightarrow$ continuité en 0 $\Rightarrow a=0$
f est dérivable en 0 si

$$f'_-(0) = f'_+(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{b \sin(x^2)}{x}}{x} = b \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

$$= b$$

On a vu tout à l'heure $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$

$$f'_-(0) = 1$$

$$f'_+(0) = b$$

$a=0$
f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow b=1$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \text{sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$$

$$\{(a,b): f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\} = \{(0,1)\}$$

DST 2019/20 Ex 7

12 January, 2021 15:47

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

① Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$

$$|x| < \sqrt{1+x^2}$$

Si $A, B > 0$ alors $A < B$

$$\Downarrow$$

$$A^2 < B^2$$

$$|x| < \sqrt{1+x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$|x|^2 < 1+x^2 \Leftrightarrow x^2 < 1+x^2 \Leftrightarrow 0 < 1$$

ce qui est vrai

② f est définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\arcsin$ défini sur $[-1, 1]$

Si $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \quad (\text{voir question 1})$$

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$$

$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est définie.

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(3) f(0) = \arcsin \frac{0}{\sqrt{1+0^2}} = \arcsin 0 = 0$$

$$(4) g(x) = \arcsin x \quad h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

g est dérivable sur $] -1; 1[$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$(5) h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1; 1[$$

$g(x) = \arcsin x$ dérivable sur $] -1; 1[$

f dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = g \circ h(x)$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-h(x)^2}} - \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}.}$$

(6) $f(x) = \arctan x + C$
où $C \in \mathbb{R}$

Déterminons C

$$f(0) = \arctan 0 + C$$

$$0 = 0 + C$$

$$\boxed{C = 0}$$

$$0 = u + c$$

$$\boxed{c = -u}$$

$$\boxed{f(x) = \arctan x}$$