Équations aux puissances de modules singuliers

Antonin Riffaut

Soit j la fonction j-invariant classique sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$. Un *module singulier* est un nombre de la forme $j(\tau)$, où $\tau \in \mathbb{H}$ est un nombre quadratique imaginaire. Le nombre $j(\tau)$ est un entier algébrique, et par la théorie des corps de classes, son degré est

$$[\mathbb{Q}(j(\tau)) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\tau, j(\tau)) : \mathbb{Q}(\tau)] = h_\Delta,$$

le nombre de classes de l'ordre quadratique $\mathcal{O}_\Delta = \mathbb{Z}[(\Delta + \sqrt{\Delta})/2]$, où Δ est le discriminant du polynôme minimal de τ sur $\mathbb{Z}$. De plus, $\mathbb{Q}(\tau, j(\tau))/\mathbb{Q}(\tau)$ est une extension galoisienne abélienne dont le groupe de Galois est canoniquement isomorphe au groupe des classes de l'ordre $\mathcal{O}_\Delta$.

Durant des décennies, motivés par la célèbre conjecture de André-Oort, de nombreux chercheurs se sont intéressés aux propriétés diophantiennes des modules singuliers. Le point de départ fut le résultat suivant de André.

Théorème 1 (André, 1998)**.** *Soit $f(X,Y) \in \overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ un polynôme irréductible avec*

$$\deg_X f \deg_Y f > 0.$$

Supposons que, pour tout entier $N > 0$, le polynôme $f(X,Y)$ n'est pas proportionnel au polynôme modulaire classique $\Phi_N(X,Y)$. Alors l'équation $f(x,y) = 0$, d'inconnues deux modules singuliers x, y, admet un nombre fini de solutions.

Nous avons étudié deux types d'équations impliquant des puissances de modules singuliers. D'une part, nous avons démontré que, à deux exceptions connues près, deux modules singuliers $j(\tau), j(\tau')$ tels que les nombres $1, j(\tau)^m, j(\tau')^n$ sont liés sur $\mathbb{Q}$, pour deux entiers $m, n > 0$, sont de degré au plus 2. D'autre part, nous avons démontré que, hormi les exceptions "évidentes", le produit de n'importe quelles puissances de deux modules singuliers ne peut être un nombre rationnel non nul.

Dans cet exposé, nous introduirons ces deux résultats dans leur cadre naturel et nous détaillerons partiellement les outils mathématiques qui ont abouti à leur démonstration.