Exercice 1

1. h est dérivable en 0. On peut donc lui appliquer la formule de TY à l'ordre 1 en 0, ce qui donne,
$$h(x) = h(0) + h'(0).x + \underset{x\to 0}{\circ}(x),$$
soit, comme $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, donc $\arctan'(0) = 1$,
$$\boxed{\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x) \quad DL_1(0).}$$
2. ($\star\star$)
Cette fois, m n'est pas d{erivable en 0 (elle n'est même pas définie en 0 !), on ne peut donc pas directement appliquer la formule de TY. On va faire d'abord le DL de sin, puis le diviser par x pour obtenir le DL de m.
sin est dérivable en 0, donc on peut lui appliquer la formule de TY à l'ordre 1 en 0, ce qui donne
$$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0) + \underset{x\to 0}{\circ}(x) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x).$$
On cherche à présent le $DL_1(0)$ de $\frac{\sin(x)}{x}$, c'est-è-dire qu'on veut écrire
$$\frac{\sin(x)}{x} = P(x) + \underset{x\to 0}{\circ}(x),$$
où $P(x)$ est un polynôme de degré au plus 1. On divise le DL de sin par x :
$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x + \underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x} = 1 + \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x}.$$
   - 1 est bien un polynôme de degré au plus 1.
   - a-t-on $\frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x} = \underset{x\to 0}{\circ}(x)$?
   Notons $r_1(x) = \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x}$. On cherche $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r_1(x)}{x}$. Or
$$\begin{array}{rcl} \frac{r_1(x)}{x} & = & \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x} \times \frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{r_1(x)}{x} & = & "0 \times \infty" \end{array}$$
   ce qui est une forme indéterminée. On ne peut donc rien dire sur cette limite, en particulier, on ne sais pas si $r_1(x) = \underset{x\to 0}{\circ}(x)$.

   On doit pousser le DL de sin jusqu'à l'ordre 2. sin est deux fois dérivable en 0. On peut donc lui appliquer la formule de TY à l'ordre 2 en 0, ce qui donne :
$$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0).x + \frac{\sin''(0)}{2}.x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$
On divise par x :
$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x} = 1 + \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x}.$$
Pour que cette écriture soit un $DL_1(0)$, il faut que $\frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x}$ soit un $\underset{x\to 0}{\circ}(x)$. Notons $r_2(x) = \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x}$. On regarde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} = 0$, par définition de $\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$. On a bien montré que $r_2(x) = \underset{x\to 0}{\circ}(x)$ et
$$\boxed{\frac{\sin(x)}{x} = 1 + \underset{x\to 0}{\circ}(x) \quad DL_1(0).}$$

3. $f(x) = \sin(e^x - 1)$. f est dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 1. $f = u \circ v$ avec $u = \sin$ et $v(x) = e^x - 1$, donc $f'(x) = v'(x).u'(v(x)) = e^x \cos(e^x - 1)$ et $f'(0) = 1$. Ainsi TY donne
$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \underset{x\to 0}{\circ}(x),$$
$$\boxed{\sin(e^x - 1) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x) \quad DL_1(0).}$$
4. g est dérivable en 0, on peut donc lui appliquer la formule de TY :
   – $g(0) = 1$,
   – $g'(x) = \frac{(3-4x)(x-1)^2-(1+3x-2x^2)(2(x-1))}{(x-1)^4}$, $g'(0) = 5$.
$$\boxed{g(x) = 1 + 5.x + \underset{x\to 0}{\circ}(x) \quad DL_1(0).}$$
5. $(\star\star)$
   Comme pour m (question 2), k n'est pas d{erivable en 0 (même pas définie en 0), et on ne peut pas lui appliquer directement TY pour trouver son DL. Il faut diviser par x le DL de $f(x) = \sin(e^x - 1)$. Comme pour m, pour être sûr que le reste de la division soit un $\underset{x\to 0}{\circ}(x)$, on va devoir pousser jusqu'à l'ordre 2 le DL de f. (Relire tranquillement la question 2 si ce n'est pas clair).
   f est deux fois dérivable en 0 et $f''(x) = (f'(x))' = (e^x \cos(e^x-1))' = e^x \cos(e^x-1) + e^x.e^x(-\sin(e^x-1) = e^x(\cos(e^x-1) - e^x \sin(e^x-1))$, donc $f''(0) = 1$. Donc la formule de TY à l'ordre 2 en 0 donne
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0).x + \tfrac{f''(0)}{2}.x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) \\ &= x + \tfrac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) \text{ d'où} \end{aligned}$$
$$\frac{\sin(e^x-1)}{x} = \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x}, \text{ et}$$
$$\boxed{\tfrac{\sin(e^x-1)}{x} = 1 + \tfrac{1}{2}.x + \underset{x\to 0}{\circ}(x) \quad DL_1(0).}$$
   puisque $\frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x} = \underset{x\to 0}{\circ}(x)$ (cf. question 2).

Exercice 2

1. f est deux fois dérivable en 0. On peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$:
   – $f(0) = 0$,
   – $f'(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(0) = 1$
   – $f''(x) = (1 + \tan^2(x))2\tan(x) \quad \rightsquigarrow \quad f''(0) = 0$
   Ainsi $f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2}.x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$,
$$\boxed{\tan(x) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) \quad DL_2(0).}$$
2. g est deux fois d{erivable en 0. On peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$:
   – $g(0) = 0$,
   – $g'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \rightsquigarrow \quad g'(0) = 1$
   – $g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \rightsquigarrow \quad g''(0) = -1$
   Ainsi $g(x) = g(0) + g'(0).x + \frac{g''(0)}{2}.x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$,
$$\boxed{\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) \quad DL_2(0).}$$

3. h est deux fois dérivable en 0. On peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$:
   - $h(0) = 0$,
   - $h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \rightsquigarrow h'(0) = 0$
   - $h''(x) = \frac{2(1+x^2)-2x.2x}{(1+x^2)^2} \rightsquigarrow h''(0) = 2$

   Ainsi $h(x) = h(0) + h'(0).x + \frac{h''(0)}{2}.x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$,

   $\boxed{\ln(1+x^2) = x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) \quad DL_2(0).}$
4. k est deux fois dérivable en 0. On peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$:
   - $k(0) = 1$,
   - $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \rightsquigarrow k'(0) = \frac{1}{2}$
   - $k''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{1+x}(1+x)} \rightsquigarrow k''(0) = -\frac{1}{4}$

   Ainsi $k(x) = k(0) + k'(0).x + \frac{k'(0)}{2}.x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$,

   $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}.x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) \quad DL_2(0).}$

Exercice 4
Au voisinage de 0, une fonction deux fois dérivable ressemble à la partie polynômiale de son $DL_2(0)$ (le $\underset{x\to 0}{\circ}$ est négligeable : on l'oublie !), donc à un polynôme de degré 2. Cherchons le $DL_2(0)$ de f.
f est deux fois dérivable en 0. On peut donc lui appliquer la formule de TY à l'ordre 2 :
- $f(0) = 1 + 1 = 2$.
- $f'(0) = -\frac{-1}{(1-x)^2} - \sin(x) \rightsquigarrow f'(0) = 1$,
- $f''(0) = -\frac{-2(1-x)}{(1-x)^4} - \cos(x) \rightsquigarrow f''(0) = 1$

Ainsi $f(x) = 2+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$ et autour de 0, la courbe de f ressemble à la courbe de la fonction polynômiale de degré 2

$$P : x \mapsto 2 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

(Je vous laisse dessiner la courbe : il faut la dessiner sur un **petit** intervalle autour de 0 : par ex $]-0,5,0,5[$. Choisissez quelques points de $\mathcal{C}_P$ pour le faire).

Exercice 5
Dans tout cet exercice, l'idée est de faire des développements limités des numérateurs et/ou des dénominateurs des fractions pour se retrouver avec des fractions rationnelles dont on sait calculer les limites.

1. sin est dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY pour trouver son $DL_1(0)$. On trouve

   $$\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x)$$

   d'où

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + \underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} 1 + \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x)}{x} = 0$ par définition de $\underset{x\to 0}{\circ}(x)$.
2. $x \mapsto \ln(1+3x)$ est dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY pour trouver son $DL_1(0)$. On trouve

   $$\ln(1+3x) = 3x + \underset{x\to 0}{\circ}(x)$$

d'où

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x} & = & \lim\limits_{x\to0}\frac{3x+\underset{x\to0}{\circ}(x)}{x}\\ & = & \lim\limits_{x\to0}3+\frac{\underset{x\to0}{\circ}(x)}{x}\\ & = & 3\end{array}$$

puisque $\lim\limits_{x\to0}\frac{\underset{x\to0}{\circ}(x)}{x}=0$ par définition de $\underset{x\to0}{\circ}(x)$.

3. $x\mapsto\sqrt{x+1}$ est dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY pour trouver son $DL_1(0)$. On trouve

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\underset{x\to0}{\circ}(x)$$

d'où

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & = & \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x+\underset{x\to0}{\circ}(x)}{x}\\ & = & \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}+\frac{\underset{x\to0}{\circ}(x)}{x}\\ & = & \frac{1}{2}\end{array}$$

puisque $\lim\limits_{x\to0}\frac{\underset{x\to0}{\circ}(x)}{x}=0$ par définition de $\underset{x\to0}{\circ}(x)$.

4. On commence par faire le changement de variable $t=x-\pi$ pour ramener la limite en 0 :

$$t=x-\pi\Leftrightarrow x=t+\pi \qquad\qquad x\to\pi\Leftrightarrow t\to0$$

$$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}$$

Ici, on a une écriture de la forme $f(t+\pi)$ et non plus $f(t+0)$ comme avant : on regarde donc le développement en π. sin est dérivable en π. On peut donc lui appliquer TY pour trouver son $DL_1(\pi)$:

$$\sin(t+\pi)=\sin(\pi)+\sin'(\pi).t+\underset{t\to0}{\circ}(t)$$

soit

$$\sin(t+\pi)=-t+\underset{t\to0}{\circ}(t)$$

d'où

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin(t+\pi)}{t} & = & \lim\limits_{t\to0}\frac{-t+\underset{t\to0}{\circ}(t)}{t}\\ & = & \lim\limits_{t\to0}-1+\frac{\underset{t\to0}{\circ}(t)}{t}\\ & = & -1\end{array}$$

puisque $\lim\limits_{t\to0}\frac{\underset{t\to0}{\circ}(t)}{t}=0$ par définition de $\underset{t\to0}{\circ}(t)$.

5. Il y a ici une erreur dans la feuille d'exo. Cette limite nécéssite un DL d'ordre 2, et allait donc dans l'exo suivant.

Exercice 6

On commence l'exercice par la dernière limite de l'exercice 5.

1. On fait un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur. Le dénominateur est un polynôme. Pour avoir son développement limité, il suffit de tronquer à l'ordre qui nous intéresse. Pour un DL_2 :

$$x^2+x^3=x^2+\underset{x\to0}{\circ}(x^2).$$

En haut : $x \mapsto (1-e^x)\sin(x)$ est deux fois dérivable en 0. On peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour obtenir son $DL_2(0)$. On trouve

$$(1-e^x)\sin(x) = -x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \tfrac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} &= \lim_{x\to 0} \tfrac{-x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \tfrac{x^2(-1+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)/x^2)}{x^2(1+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)/x^2)} \\
&= \tfrac{-1}{1} = -1
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} = 0$ par définition de $\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$.

2. $x \mapsto \sin(x^2)$ est deux fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$ ce qui donne :

$$\sin(x^2) = x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$

De même, cos est deux fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$ ce qui donne :

$$\cos(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \tfrac{x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{-x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \tfrac{x^2(1+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)/x^2)}{x^2(-1+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)/x^2)} \\
&= \tfrac{1}{-1} = -1
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} = 0$ par définition de $\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$.

3. $x \mapsto \ln(1+3x)$ est deux fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$ ce qui donne :

$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$

De même, $x \mapsto \ln(1+x)$ est deux fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$ ce qui donne :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(1+3x)-3x}{\ln(1+x)-x} &= \lim_{x\to 0} \tfrac{-\frac{9}{2}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \tfrac{x^2(-9/2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)/x^2)}{x^2(-1/2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)/x^2)} \\
&= \tfrac{-9/2}{-1/2} = 9
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} = 0$ par définition de $\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$.

4. $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est deux fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$ ce qui donne :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}.x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$
Ainsi
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1-x/2}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{8} + \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{-1}{8} \end{aligned}$$
puisque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} = 0$ par définition de $\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$.
5. tan est deux fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 pour trouver son $DL_2(0)$ ce qui donne :
$$\tan(x) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$
Ainsi
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$
puisque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{x^2} = 0$ par définition de $\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)$.

Exercice 7

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. $f''(x) = (\frac{1}{1+x^2})' = (u \circ v(x))'$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v(x) = 1+x^2 \rightsquigarrow v'(x) = 2x$. Ainsi
$$f''(x) = v'(x)u'(v(x)) = 2x\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$
f étant deux fois dérivable en 0, on peut lui appliquer TY à l'ordre 2 en 0 ce qui donne
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) = x + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2), DL_2(0).$$
De même, f est deux fois dérivable en 1, on peut donc lui appliquer TY à l'ordre 2 en 1 ce qui donne
$$f(x+1) = f(1) + f'(1)x + \frac{f''(1)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$