

La résolution d'une équation différentielle (E) se fait en 4 étapes:

- 1 Écriture de (E) sous la forme (E) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$.
- 2 Résolution de l'équation homogène (E_h) $y'(x) = a(x)y(x)$ associée : on trouve une infinité de solutions

$$\mathbf{y}_h = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(x)}, \mathbf{C} \in \mathbb{R} \quad \text{où } A(x) \text{ est une primitive de } a(x).$$
- 3 Recherche d'une solution particulière de (E), $\mathbf{y}_p$.
- 4 Conclusion: l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $\{\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h\}$.

Pour déterminer une solution particulière, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, ce qui se fait en 5 étapes:

- a) On choisit une solution de (E_h) qui ne s'annule pas (en pratique, le plus simple est de choisir la constante $C = 1$), par exemple $\mathbf{y}_0 = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(x)}$.
- b) On écrit que l'on cherche une solution particulière sous la forme $\mathbf{y}_p(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})\mathbf{y}_0(\mathbf{x})$, où $c(x)$ est une fonction que l'on cherche à déterminer.
- c) On écrit la dérivée de $c(x)$: elle vaut $c'(x) = \frac{b(x)}{y_0(x)}$.
- d) On trouve $c(x) = \int c'(x)$ en déterminant une primitive de la quantité ci-dessus.
- e) Conclusion: $\mathbf{y}_p(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})\mathbf{y}_0(\mathbf{x})$.

Dans cette fiche, on détaille ce processus sur l'équation différentielle

$$(E) \quad (x+1)y'(x) + xy(x) = (x+1)^2.$$

1. Écriture de (E) sous la forme adaptée à sa résolution.

Ici, (E) n'est pas sous la bonne forme: il y a une fonction devant le y' et le membre en y n'est pas du bon côté de l'équation. On réécrit donc

$$(E) \Leftrightarrow y'(x) = -\frac{x}{x+1}y(x) + \frac{(x+1)^2}{x+1} = -\frac{x}{x+1}y(x) + (x+1).$$

et (E) est définie sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$.

2. Résolution de l'équation homogène associée.

$$(E_h) \quad y'(x) = -\frac{x}{x+1}y(x).$$

D'après le cours, les solutions sont les fonctions de la forme $y_h(x) = Ce^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, où $A(x)$ est une primitive de $-\frac{x}{x+1}$. Pour déterminer une primitive de cette fonction – en se souvenant de l'exercice 3 de la feuille de TD sur l'intégration par exemple – on écrit que

$$-\frac{x}{x+1} = -\frac{x+1-1}{x+1} = -\frac{x+1}{x+1} - \frac{-1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}.$$

On trouve donc $A(x) = -x + \ln(|x+1|)$, et les solutions de (E_h) sont les fonctions

$$y_h(x) = Ce^{-x+\ln(|x+1|)}, C \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad y_h(x) = C(|x+1|)e^{-x}, C \in \mathbb{R} \quad \text{ou encore}$$

$$y_h(x) = C(x+1)e^{-x}, C \in \mathbb{R}$$

(on peut enlever la valeur absolue puisque la constante parcourt tout $\mathbb{R}$).

3. Recherche d'une solution particulière de (E).

On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

- a) Choisissons une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas. $y_0(x) = (x+1)e^{-x}$ convient.
- b) On cherche la solution particulière sous la forme $y_p(x) = c(x)y_0(x) = c(x)(x+1)e^{-x}$.
- c) $c'(x) = \frac{b(x)}{y_0(x)} = \frac{x+1}{(x+1)e^{-x}} = e^x$.
- d) Une primitive de e^x est e^x , donc $c(x) = e^x$ convient.
- e) Finalement, une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = e^x(x+1)e^{-x} = x+1.$$

4. Conclusion.

L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en additionnant la solution particulière aux solutions de l'équation homogène (E_h). Ce sont donc les fonctions

$$y(x) = (x+1) + C(x+1)e^{-x}, C \in \mathbb{R}.$$