

UNIVERSITÉ PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE

**Comportement asymptotique
en couche mince d'écoulements fluides**

Analyse mathématique des glissements de terrain

MÉMOIRE

KRISZTIÁN BENYÓ

Master Recherche

Mathématiques et applications

Champs-sur-Marne, 2015



Directeur du mémoire :

FRANÇOIS BOUCHUT

Directeur de Recherches CNRS

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à remercier le Laboratoire d'Excellence Bézout qui m'a permis de passer un an en France dans le cadre du Master 2 à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée. Suivre le Bézout Excellence Track a été une expérience extrêmement utile et inoubliable pour moi et mes diverses connaissances mathématiques se sont considérablement développées en suivant les cours du parcours analyse.

Je tiens à remercier vivement mon directeur de stage, M. François Bouchut, membre du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées et Directeur de Recherches au CNRS, pour son accueil, le temps passé ensemble et le partage de son expertise au quotidien.

Enfin, je remercie également toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction de ce rapport de stage, particulièrement M. Marco Cannone pour ses conseils et aides.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Quelques modèles bien connus	2
1.1 Le modèle de Saint Venant	2
1.2 Le modèle de Savage–Hutter	4
2 Deux variantes du modèle de Saint Venant	5
2.1 Une formulation intégrant la variation normale	9
2.1.1 Un modèle corrigé	9
2.1.2 Dépendence de la vitesse dans la direction normale	11
2.2 Densité variable	14
3 Modèle compressible avec viscosité	19
3.1 Cas d’un coefficient de viscosité petit	20
3.2 Cas d’un coefficient de viscosité non petit	21
3.3 Termes de viscosité de cisaillement	22
A Dérivation des équations	24
Bibliographie	29

L'étude des écoulements granulaires et des glissements de terrain d'un point de vue mathématique n'a pas une très longue histoire. Les phénomènes géologiques impliquant des matériaux granulaires ont des origines très diverses, ils se passent dans des environnements et des échelles extrêmement différents. Leur analyse ne peut donc pas se faire en toute généralité. De plus, comme il s'agit de processus impliquant un grand nombre de phénomènes, il est aussi difficile de faire des simulations et des expériences de laboratoire.

Néanmoins, à cause de l'enjeu des catastrophes naturelles liées à ces phénomènes, les géophysiciens investissent fortement le thème des écoulements granulaires. Par conséquent, actuellement on peut accéder à une énorme masse de données concernant les expériences en laboratoire. Celles-ci forment une base qui permet d'envisager des modèles théoriques.

Dans ce mémoire je voudrais présenter quelques calculs de base sur ce sujet, avec quelques modèles anciens ou récents qui sont très intéressants (historiquement, scientifiquement ou contemporainement).

Dans le premier chapitre, je commence par décrire les fondations, avec "le premier modèle des écoulements granulaires", celui des écoulements en eaux peu profondes (*shallow water model*) de Saint Venant. Je présente aussi le modèle de Savage–Hutter, qu'on peut considérer comme le premier vrai modèle granulaire (pour décrire les avalanches).

Le deuxième chapitre décrit des développements mathématiques récents sur les modèles shallow water pour les écoulements granulaires. En même temps je présente quelques nouveaux calculs prospectifs.

Dans le troisième chapitre, je présente d'autres problématiques liées à ce sujet, quelques idées pour les résoudre et quelques directions possibles d'étude.

CHAPITRE 1

QUELQUES MODÈLES BIEN CONNUS

Comme énoncé dans l'introduction, ce première chapitre présente les deux étapes les plus importantes dans l'histoire des modèles d'écoulements granulaires en couche mince (*shallow water*). L'intérêt ne se trouve pas seulement dans l'importance historique de ces modèles, mais également dans le fait qu'essentiellement tous les modèles en couche mince dans le sujet sont plus ou moins liés à ces deux là.

1.1 Le modèle de Saint Venant

La modélisation des glissements de terrain tire son origine des modèles concernant les écoulements en eaux peu profondes. En fait, les hypothèses assez générales permettent de décrire l'une comme l'autre situation. Ce qui nous intéresse tout d'abord, ce sont donc les modèles de type *shallow water*. Un prototype pour cela est l'équation de Saint Venant pour les rivières et zones côtières qui est valable pour des pentes faibles.

Adhémar Jean-Claude Barré de Saint Venant, ancien étudiant et enseignant-chercheur de mathématiques à l'Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, était le premier mathématicien qui a réussi à établir un modèle valable pour les canaux à surface libre. Ses travaux vont de la mécanique à l'hydrodynamique en passant par l'élasticité et l'hydrostatique ; il a présenté ses résultats révolutionnaires en 1871 dans un compte rendu à l'Académie des Sciences ([6]).

Régi par un système d'équations aux dérivées partielles, car la hauteur et la vitesse de l'eau dépendent à la fois du temps et d'une coordonnée d'espace, son modèle est connu en France aujourd'hui sous le nom d'équations de Saint Venant. Dans le monde anglo-saxon, il est aussi appelé *shallow water equations* parce qu'il s'applique à des canaux dont la profondeur est petite (d'où *shallow*) par rapport à la longueur. Dans son modèle, tous les points d'une même tranche d'eau verticale se déplacent à

la même vitesse horizontale ; l'écoulement est considéré comme monodimensionnel (ou filaire).

Le modèle de Saint Venant est dérivé des équations d'Euler (ou des équations de Navier–Stokes si on inclut la viscosité). Il est constitué de deux lois de conservation : une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de la quantité de moment. Ce système possède une propriété remarquable similaire à celle mise en évidence par Bernhard Riemann pour les équations de la dynamique des gaz : certaines quantités, fonctions de la hauteur et de la vitesse de l'eau, se propagent telles des ondes à des vitesses différentes de la vitesse de l'eau le long du canal. Ces quantités sont une version des ondes progressives, ils sont appelés les *invariants de Riemann* et permettent de mieux comprendre l'écoulement de l'eau le long des canaux.

Bientôt âgées de 150 ans, les équations de Saint Venant n'en sont pas moins toujours d'actualité. Elles sont utilisées pour modéliser et analyser nombre de phénomènes liés à l'océanographie côtière ou aux écoulements à faible profondeur, ce dernier nous intéressant maintenant.

Dans le chapitre suivant je vais introduire quelques variantes de ce modèle (in)compressible et unidimensionnel, mais pour référence je vais présenter le modèle général (cas bidimensionnel). Cette généralisation a été formulée ultérieurement aux travaux originels de Saint Venant.

Nous notons ici u et v les vitesses dans le plan horizontal (x, y) , la gravité étant suivant z . Si on définit $z = b(x, y)$ comme étant le fond de la rivière et $h(t, x, y)$ la hauteur d'eau, alors on peut exprimer les deux lois de conservation avec ces trois équations :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) + \partial_y(huv) &= -hg\partial_x b - \frac{\tau_x}{\rho} + F_x, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) &= -hg\partial_y b - \frac{\tau_y}{\rho} + F_y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ici la densité ρ est considérée comme constante (on peut supposer qu'elle vaut 1). Les termes τ_x et τ_y sont des forces de frottement au fond et F_x et F_y sont des forces volumiques extérieures (comme l'accélération de Coriolis ou une force d'entraînement due au vent).

Pour un modèle de Saint Venant unidimensionnel assez général, on peut simplifier le système (1.1) à une seule dimension. En même temps on peut aussi généraliser un peu ce modèle en remplaçant le terme $h\partial_x b$ par un terme plus général correspondant à l'effet de gravité généralisé (donc pas nécessairement pour les topographies qui varient lentement, voir section 2.1). Dans ce modèle on note G le terme de gravité

généralisé, on a alors

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) &= -gG - \frac{\tau}{\rho} + F,\end{aligned}\tag{1.2}$$

si on note τ le terme de friction et F les forces extérieures.

1.2 Le modèle de Savage–Hutter

Suite à une série d'articles publié dans les années 90, Stuart Savage et Kolumban Hutter ont présenté un raffinement du modèle de Saint Venant ([10]) et en même temps une relativement nouvelle approche à la théorie des écoulements granulaires. Initialement ils travaillent sur le sujet des avalanches, mais leurs idées et leurs équations sont adaptées à des écoulements plus généraux.

Leur idée principale était d'établir un modèle précis pour le cas où le rapport de hauteur sur longueur est très petit (de l'ordre ε). Ils ont introduit un terme de frottement de type Coulomb qui peut être mesuré assez facilement (car il dépend des angles de friction et de ε). Une forme générale de leur système est

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) + \partial_y(huv) &= hs_x - \partial_x\left(\frac{\beta_x h^2}{2}\right), \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2) &= hs_y - \partial_y\left(\frac{\beta_y h^2}{2}\right);\end{aligned}\tag{1.3}$$

où les termes s_x et s_y sont des termes gravitaires généralisés dans le cas de faible profondeur et β_x et β_y sont des coefficients dépendant du caractère "actif" ou "passif" de l'écoulement.

Pour une analyse complète concernant les hypothèses précisées de ce modèle et pour une liste des applications du système de Savage–Hutter, le lecteur est invité à consulter [11] ou [7].

CHAPITRE 2

DEUX VARIANTES DU MODÈLE DE SAINT VENANT

Dans cette chapître j'étudie des variantes plus élaborées du modèle de Saint Venant et Savage–Hutter. Tout d'abord je vais proposer une modification du modèle original unidimensionnel en suivant les étapes de [2]. Cela sera une base initiale pour ce qui suit : la correction du modèle en la direction normale avec laquelle nous allons obtenir une formulation valable sous peu d'hypothèses et avec de bonnes propriétés.

Pour la deuxième partie nous introduisons la densité comme nouvelle variable et nous établissons des résultats similaires à ceux de la première section. En effet, nous déduisons que ce nouveau modèle se réduit asymptotiquement aux modèles déjà énoncés.

Nous commençons par la dérivation des nouvelles équations d'Euler, formulées en la vitesse tangentielle U et la vitesse normale W (en formulation unidimensionnelle). Ce nouveau système va jouer un rôle importante en la formulation du modèle de Saint Venant corrigé dans la première partie, de plus on va l'utiliser pour établir le modèle compressible proposé par [5].

En dimension 2, on a la forme générale suivante pour les équations d'Euler compressibles pour décrire l'évolution d'un fluide compressible sous les effets des forces gravitaires :

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \vec{V}) &= 0, \\ \partial_t(\varrho \vec{V}) + \operatorname{div}(\varrho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \nabla P &= \vec{g} \varrho, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où \vec{V} dénote le vecteur (cartésien) de la vitesse, P est la pression et $\vec{g} = (0, -g)^\top$ est l'accélération de la gravité. Tout est écrit en coordonnées cartésiennes.

On considère un fluide qui occupe un domaine entre le fond fixé $y = b(x)$ et la surface libre. La densité ϱ dépend du temps et de l'espace. Pour le moment on ne fait pas plus d'hypothèses.

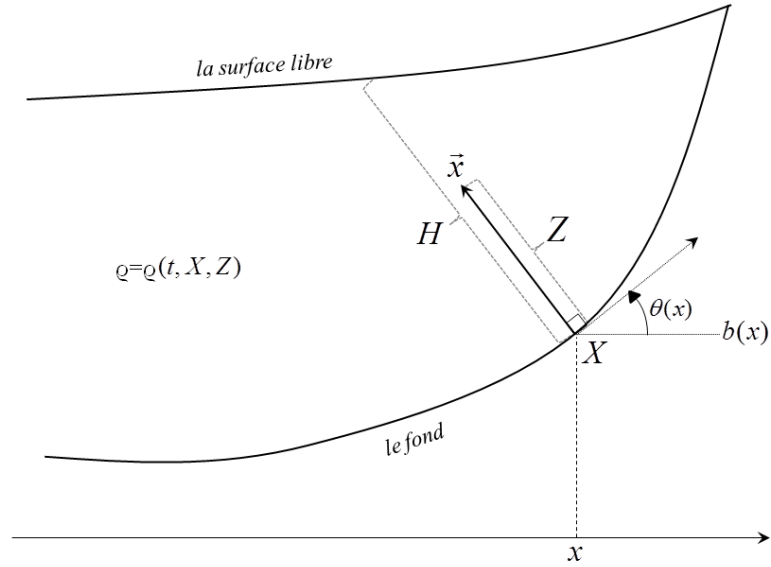


FIGURE 2.1 – La couche de fluide

On veut passer aux coordonnées curvilignes (X, Z) où X est la coordonnée curviligne le long du fond et Z est la variable normale au fond $0 < Z < H(t, X)$, où H est l'épaisseur du domaine fluide dans la direction normale au fond. Il est facile de voir que la coordonnée curviligne X et la coordonnée cartésienne horizontale x sont reliées de la manière suivante,

$$\cos \theta dX = dx, \quad (2.2)$$

d'où on peut obtenir que

$$\partial_x b = \tan \theta \quad \text{et} \quad \partial_X b = \sin \theta.$$

Pour obtenir le nouveau système d'Euler on fait le changement de variables suivant (voir figure 2.1)

$$\vec{x} = \vec{x}(X, Z) = (x, b(x)) + Z \cdot (-\sin \theta, \cos \theta),$$

où \vec{x} est la variable d'espace dans les coordonnées cartésiennes et $\vec{X} = (X, Z)$ sera "la même variable" dans les coordonnées curvilignes. On voit que le point $(x, b(x))$ correspond exactement au point du fond paramétrisé par X .

Si on note

$$J = 1 - Z \partial_X \theta, \quad (2.3)$$

alors en utilisant la définition du changement de variables précédent et la relation entre x et X (notamment que formellement $\partial_X x = \cos \theta$) on obtient que la Jacobienne vaut

$$A = \partial_{\vec{X}} \vec{x} = \begin{pmatrix} J \cos \theta & -\sin \theta \\ J \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Si on note R_θ la matrice de rotation d'angle θ c'est-à-dire

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

alors on peut facilement obtenir que

$$A = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R_{-\theta}.$$

Par la définition du changement de variables on a $A^\top \nabla_{\vec{x}} = \nabla_{\vec{X}}$, d'où on peut aussi obtenir la relation suivante pour les divergences

$$J \cdot \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{z} = \operatorname{div}_{\vec{X}} (JA^{-1} \vec{z}) \quad \text{pour tout champ de vecteurs } \vec{z}. \quad (2.5)$$

Avec cette équation nos préliminaires sont exposés, et nous pouvons commencer la dérivation du nouveau système d'Euler. Comme déjà énoncé, nous notons U la composante tangentielle de la vitesse \vec{V} , et W la composante normale, ce qui signifie que $\vec{U} = (U, W)^\top = R_{-\theta} \vec{V}$.

Alors si on applique (2.5) pour $\varrho \vec{V}$ on obtient que

$$\operatorname{div}_{\vec{x}} (\varrho \vec{V}) = \frac{1}{J} \operatorname{div}_{\vec{X}} (JA^{-1} \varrho \vec{V}) = \frac{1}{J} \operatorname{div}_{\vec{X}} \left(\varrho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} R_{-\theta} \vec{V} \right) = \frac{1}{J} \operatorname{div}_{\vec{X}} (\varrho(U, JW)^\top).$$

Comme J ne dépend pas du temps, on peut conclure que la première équation de (2.1) prend la forme

$$\partial_t(\varrho J) + \partial_X(\varrho U) + \partial_Z(\varrho JW) = 0. \quad (2.6)$$

Pour être capable de transformer la deuxième équation nous réécrivons cette équation grâce à la première équation :

$$\begin{aligned} \varrho \vec{g} &= \partial_t (\varrho \vec{V}) + \operatorname{div} (\varrho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \nabla P \\ &= \partial_t \varrho \cdot \vec{V} + \varrho \cdot \partial_t \vec{V} + \operatorname{div} (\varrho \vec{V}) \cdot \vec{V} + \varrho (\nabla \vec{V}) \cdot \vec{V} + \nabla P \\ &= \varrho \partial_t (\vec{V}) + \varrho (\nabla \vec{V}) \cdot \vec{V} + \nabla P. \end{aligned}$$

Par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\vec{x}} \vec{V}) \vec{V} &= (\nabla_{\vec{x}} \vec{V} A^{-1}) \vec{V} = \nabla_{\vec{x}} (R_\theta \vec{U}) \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U} \\
&= R_\theta \nabla_{\vec{x}} \vec{U} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U} + \nabla_{\vec{x}} (R_\theta) \vec{U} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U} \\
&= R_\theta \nabla_{\vec{x}} \vec{U} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U} + (R_{\theta+\frac{\pi}{2}} \vec{U}) (\nabla_{\vec{x}} \theta)^\top \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $R_{-\theta}$ et en utilisant l'identité obtenue au-dessus on peut conclure que

$$\partial_t \vec{U} + \nabla_{\vec{x}} \vec{U} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U} + \partial_X \theta \begin{pmatrix} -W & 0 \\ U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U} + \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\rho} \nabla_{\vec{x}} P = R_{-\theta} \vec{g},$$

et que

$$\begin{aligned}
\partial_t (JU) + U \partial_X U + JW \partial_Z U + \frac{1}{\rho} \partial_X P &= -Jg \sin \theta + UW \partial_X \theta, \\
\partial_t (JW) + U \partial_X W + JW \partial_Z W + \frac{1}{\rho} J \partial_Z P &= -Jg \cos \theta - U^2 \partial_X \theta.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Pour que le système (2.6)-(2.7) soit complet, on veut aussi obtenir des 'conditions au bord', c'est-à-dire quelques équations à la surface libre. On va introduire les conditions cinématiques, qui permet de déduire le mouvement de la surface libre et donc de H aussi. Effectivement elle exprime que le bord se déplace avec le flot.

Alors si on note (N_t, \vec{N}) le vecteur normale extérieur en temps-espace à la surface libre, on peut écrire

$$N_t + \vec{V} \cdot \vec{N} = 0,$$

qui nous donne

$$J \partial_t H + U \partial_X H = JW$$

à la surface libre.

2.1 Une formulation intégrant la variation normale

Cette partie décrit quelques résultats obtenus par François Bouchut, Anne Mangeney et autres dans [2]. Leur nouveau modèle est valable quelle que soit la topographie et a les propriétés de fournir une inégalité de dissipation d'énergie et d'être une solution hydrostatistique exacte des équations d'Euler. On va considérer le cas incompressible dans cette partie, donc on va supposer que $\varrho = 1$.

2.1.1 Un modèle corrigé

Il s'agit d'un nouveau modèle de type Savage–Hutter unidimensionnel. Ce système est basé sur les équations de Saint Venant de la forme (1.2), mais où nous remplaçons la hauteur verticale h par la hauteur de l'eau en la direction normale, qu'on note $H = H(t, X)$. Nous passons donc en coordonnées curvilignes. Par conséquent nous ajoutons des termes gravitaires en la direction normale et tangentielle, qui sont $g \sin \theta$ et $g \cos \theta$ respectivement,

$$\begin{aligned} \partial_t H + \partial_X(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \partial_X\left(Hu^2 + \frac{1}{2}H^2g \cos \theta\right) &= -g \sin \theta \left(H - \frac{1}{2}H^2\partial_X\theta\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Comme ci-dessus, on paramétrise par X le point du fond (cordonnée curviligne) et $u = u(t, X)$ est la vitesse tangentielle. On a utilisé un terme de friction comme dans le système de Savage–Hutter (1.3), où $\partial_X\theta$ est la courbure du fond. Ce terme est un ajustement subtil (dans certains cas on peut le négliger) mais il garantit des propriétés très remarquables énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Le système (2.8) vérifie les propriétés suivantes :*

1. *il admet une inégalité d'entropie de la forme*

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}Hu^2 + \frac{1}{2}H^2g \cos \theta + Hgb \right) + \partial_X \left[\left(\frac{1}{2}Hu^2 + H^2g \cos \theta + Hgb \right) u \right] \leq 0, \quad (2.9)$$

2. *il préserve l'état stationnaire du lac au repos*

$$u = 0, \quad H \cos \theta + b = \text{Const.}$$

Preuve: On commence par la reformulation de la deuxième équation de (2.8) :

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t(Hu) + \partial_X \left(Hu^2 + \frac{1}{2}H^2g \cos \theta \right) + Hg \sin \theta - \frac{1}{2}H^2g \sin \theta \partial_X \theta \\
&= H\partial_t u + u\partial_t H + Hu\partial_X u + u\partial_X(Hu) + H\partial_X Hg \cos \theta + \frac{1}{2}H^2g\partial_X(\cos \theta) \\
&\quad + Hg \sin \theta - \frac{1}{2}H^2g \sin \theta \partial_X \theta \\
&= H \cdot \left(\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_X(u^2) + \partial_X(Hg \cos \theta) + g \sin \theta \right).
\end{aligned}$$

On a donc un système équivalent

$$\begin{aligned}
\partial_t H + \partial_X(Hu) &= 0, \\
\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_X(u^2) + \partial_X(Hg \cos \theta) + g \sin \theta &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Si on multiplie la première équation par $\frac{1}{2}u^2 + Hg \cos \theta + gb$ et la deuxième par Hu , sommant ces deux équations on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t H \cdot \left(\frac{1}{2}u^2 + Hg \cos \theta + gb \right) + \partial_t u \cdot (Hu) \\
&\quad + \partial_X(Hu) \cdot \left(\frac{1}{2}u^2 + Hg \cos \theta + gb \right) + \left(\frac{1}{2}\partial_X(u^2) + \partial_X(Hg \cos \theta) + g \sin \theta \right) \cdot Hu \\
&= \partial_t \left(\frac{1}{2}Hu^2 + \frac{1}{2}H^2g \cos \theta + Hgb \right) + \partial_X \left[\left(\frac{1}{2}Hu^2 + H^2g \cos \theta + Hgb \right) u \right].
\end{aligned}$$

Pour le deuxième point, on a la résultat requis si on utilise ce système équivalent.

□

Proposition 2.2. *Avec une pente constante ($\partial_X \theta = 0$), le système (2.8) donne une solution exacte au système d'Euler à surface libre avec l'hypothèse hydrostatique.*

Preuve: On rappelle qu'on a déjà formulé une modification du système d'Euler dans le début de ce chapitre, en particulier on a le système d'équations (2.6) et (2.7). Dans notre cas on a une densité constante (on peut supposer que $\rho = 1$). De plus, comme $\partial_X \theta = 0$, on obtient que $J = 1$ est constant.

Nous avons aussi $w = W = O(\varepsilon)$ avec le rapport $H/L \equiv \varepsilon$ (hauteur sur longueur). Donc on peut négliger les termes avec les dérivées de W dans la deuxième équation de (2.7). On obtient le système d'Euler simplifié

$$\begin{aligned}
\partial_X U + \partial_Z W &= 0, \\
\partial_t U + U\partial_X U + W\partial_Z U + \partial_X P &= -g \sin \theta, \\
\partial_Z P &= -g \cos \theta,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

avec les conditions au bord ($0 < Z < H(t, X)$)

$$W(t, X, Z = 0) = 0, \quad P(t, X, Z = H(t, X)) = 0. \quad (2.12)$$

Maintenant si on pose

$$U = u(t, X), \quad W = -Z\partial_X u, \quad \text{et} \quad P = (H(t, X) - Z)g \cos \theta, \quad (2.13)$$

le système (2.11) implique la deuxième équation de (2.10) (car $\sin \theta = \partial_X b$). Et comme u est constante dans la direction normale, la première équation de (2.10) est exacte. \square

2.1.2 Dépendance de la vitesse dans la direction normale

Dans cette partie, nous améliorons le modèle précédent qui faisait des hypothèses asymptotiques sur la topographie pour obtenir une solution des équations d'Euler (voir Proposition 2.2). Pour faire cette amélioration, nous introduisons une dépendance élaborée de la vitesse tangentielle U dans la direction normale.

Ce nouveau modèle, introduit par Bouchut et autres ([2]), résout aussi un autre problème du système (2.8), à savoir la conservation exacte de la masse. Nous pouvons représenter le volume entre X_1 et X_2 en intégrant le déterminant de la Jacobienne sur ce volume,

$$Volume = \int_{X_1}^{X_2} \int_0^{H(X)} J dX dZ = \int_{X_1}^{X_2} \left(H - \frac{1}{2} H^2 \partial_X \theta \right) dX. \quad (2.14)$$

Pour s'assurer que le terme volumique $H - \frac{1}{2} H^2 \partial_X \theta$ n'est pas négatif on obtient une condition de petitesse pour la largeur du fluid. En prenant tout en considération, on peut établir sur la base du système (2.10) le modèle suivant

$$\begin{aligned} \partial_t \left(H - \frac{1}{2} H^2 \partial_X \theta \right) + \partial_X \left(\frac{\ln(1 - H \partial_X \theta)}{-\partial_X \theta} u \right) &= 0, \\ \partial_t u + \partial_X \left(\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - H \partial_X \theta)^2} u^2 + H g \cos \theta + g b \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Proposition 2.3. *Le système (2.15) a les propriétés suivantes*

1. *Il admet une inégalité d'entropie de la forme*

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \frac{\ln(1 - H \partial_X \theta)}{-\partial_X \theta} u^2 + \left(\frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{3} H^3 \partial_X \theta \right) g \cos \theta + \left(H - \frac{1}{2} H^2 \partial_X \theta \right) g b \right) \\ + \partial_X \left(\frac{\ln(1 - H \partial_X \theta)}{-\partial_X \theta} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - H \partial_X \theta)^2} u^2 + H g \cos \theta + g b \right) u \right) \leq 0, \end{aligned}$$

2. il préserve l'état stationnaire du lac au repos

$$u = 0, \quad H \cos \theta + b = \text{Const},$$

3. il donne une solution exacte au système d'Euler à surface libre avec hypothèse hydrostatique (à préciser plus tard).

Preuve: Si on multiplie la première équation de (2.15) par $\frac{1}{2} \frac{1}{(1-H\partial_X\theta)^2} u^2 + Hg \cos \theta + gb$ et la deuxième par $\frac{\ln(1-H\partial_X\theta)}{-\partial_X\theta}$, sommant en suivant le même calcul que dans la proposition 2.1, on obtient le premier point.

Le deuxième point est encore trivial.

Pour le troisième point, comme dans la dernière partie, on utilise le système modifié de (2.6) et (2.7) avec l'hypothèse $\varrho = 1$. Comme la région du fluide, défini par

$$\chi(t, X, Z) = \mathbb{1}_{0 < Z < H(t, X)}, \quad (2.16)$$

est advectée par le flot, on peut réécrire l'équation (2.6) sous la forme

$$\partial_t(\chi J) + \partial_X(\chi U) + \partial_Z(\chi JW) = 0. \quad (2.17)$$

L'hypothèse hydrostatique implique encore qu'on peut négliger l'accélération dans la direction normale (donc avec l'hypothèse $W \equiv O(\varepsilon)$). Ainsi dans ce cas on a le système d'Euler simplifié suivant

$$\begin{aligned} \partial_X U + \partial_Z(JW) &= 0, \\ \partial_t(JU) + U\partial_X U + JW\partial_Z U + \partial_X P &= -Jg \sin \theta + UW\partial_X \theta, \\ J\partial_Z P &= -Jg \cos \theta - U^2\partial_X \theta, \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec les conditions au bord

$$W(t, X, Z = 0) = 0, \quad P(t, X, Z = H) = 0.$$

On veut que $JU = u$ ne dépende plus de Z . Avec une telle équation, la troisième équation dans (2.18) a la forme

$$\partial_Z P = -g \cos \theta - \frac{u^2 \partial_X \theta}{J^3}.$$

Si on intègre cette équation par rapport à Z , alors on peut poser

$$U = \frac{u(t, X)}{1 - Z\partial_X \theta}, \quad P = (H - Z)g \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 - H\partial_X \theta)^2} - \frac{1}{(1 - Z\partial_X \theta)^2} \right) u^2. \quad (2.19)$$

Comme $J\partial_Z U = U\partial_X \theta$ on peut simplifier le deuxième équation de (2.18) en utilisant

le fait que $\partial_X b = \sin \theta$ pour obtenir

$$\partial_t u + \partial_X \left(\frac{1}{2} U^2 + P + Zg \cos \theta + gb \right) = 0,$$

qui implique la deuxième équation de (2.15). Et pour la première équation on doit tout simplement intégrer l'égalité d'advection (2.17) par rapport à Z . \square

Remarque 2.1. *Le système (2.18) admet une (in)égalité d'énergie*

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\left(\frac{1}{2} U^2 + g(b + Z \cos \theta) \right) J \right) + \partial_X \left(\left(\frac{1}{2} U^2 + P + g(b + Z \cos \theta) \right) U \right) \\ + \partial_Z \left(\left(\frac{1}{2} U^2 + P + g(b + Z \cos \theta) \right) JW \right) = 0. \end{aligned}$$

On peut démontrer l'inégalité d'entropie pour le système (2.15) en intégrant cette égalité par rapport à Z .

2.2 Densité variable

Dans cette section nous considérons un modèle compressible avec une densité variable sur la base des calculs des dernières parties. Nous partons encore des équations d'Euler (2.1) et on fait les hypothèses suivantes

- ◆ le fond est fixé et déterminé par $y = b(x)$,
- ◆ la pression est constante à la surface libre,
- ◆ la surface libre est advectée par la vitesse matérielle,
- ◆ la composante normale de la vitesse s'annule au fond.

On va travailler avec un système écrit en coordonnées curvilignes. Comme précédemment on a l'équation d'advection pour la fonction caractéristique $\chi(t, X, Z) = \mathbb{1}_{0 < Z < H(t, X)}$ et la vitesse $\vec{V} = (U, W)$

$$\partial_t(\chi \varrho J) + \partial_X(\chi \varrho U) + \partial_Z(\chi \varrho JW) = 0; \quad (2.20)$$

et avec les hypothèses hydrostatique on a les équations suivantes (obtenues sur la base des équations (2.6) et (2.7))

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho J) + \partial_X(\varrho U) + \partial_Z(\varrho JW) &= 0, \\ \partial_t(JU) + U\partial_X U + JW\partial_Z U + \frac{1}{\varrho}\partial_X P &= -Jg \sin \theta + UW\partial_X \theta, \\ \frac{1}{\varrho}J\partial_Z P &= -Jg \cos \theta - U^2\partial_X \theta; \end{aligned} \quad (2.21)$$

avec les conditions au bord

$$P(t, X, Z = H) = P_1, \quad W(t, X, Z = 0) = 0. \quad (2.22)$$

Le système est complété dans cette partie par la loi non visqueuse

$$P = p(\varrho), \quad (2.23)$$

où $p(\cdot)$ est une fonction croissante donnée. On prend $P_1 = p(\varrho_1)$, et la condition à la surface libre sur P se réécrit donc $\varrho(t, X, Z = H) = \varrho_1$.

Nous allons justifier un modèle en couche mince de la forme suivante [5]

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi + \partial_X(\varphi u) &= 0, \\ \partial_t(\varphi u) + \partial_X(\varphi u^2 + \psi) &= -\varphi g \partial_X b - \psi \frac{\partial_X \cos \theta}{\cos \theta}; \end{aligned} \quad (2.24)$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi(H, X) = \frac{1}{g \cos \theta} \Phi \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right), \\
\psi &= \psi(H, X) = \frac{1}{g \cos \theta} \Upsilon \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right), \\
\Phi(h) &= \int_{\left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1)}^h \left(e + \frac{p}{\varrho} \right)^{-1} (r) dr, \\
\Upsilon(h) &= \int_{\left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1)}^h \Phi(r) dr, \\
e'(\varrho) &= \frac{p(\varrho)}{\varrho^2}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2. Les paramètres du système sont ϱ_1 et la loi de pression $p(\varrho)$.

Lemme 2.1. Pour une telle fonction ψ on a

$$\partial_H \psi = \varphi g \cos \theta, \quad \text{et} \quad \partial_X \psi = \psi \tan \theta \partial_X \theta - \varphi H g \sin \theta \partial_X \theta. \quad (2.25)$$

Preuve: On va calculer les dérivées partielles en utilisant la définition de $\psi(H, X)$.

$$\begin{aligned}
\partial_H \psi(H, X) &= \partial_H \left(\frac{1}{g \cos \theta} \Upsilon \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) \right) \\
&= \frac{1}{g \cos \theta} \partial_H \left(\Upsilon \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) \right) \\
&= \Upsilon' \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) = \Phi \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) \\
&= \varphi(H, X) g \cos \theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_X \psi(H, X) &= \partial_X \left(\frac{1}{g \cos \theta} \Upsilon \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) \right) \\
&= \frac{\Upsilon' \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) (-Hg \sin \theta \partial_X \theta) g \cos \theta}{(g \cos \theta)^2} \\
&\quad + \frac{\Upsilon \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) g \sin \theta \partial_X \theta}{(g \cos \theta)^2} \\
&= -\frac{\Phi \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right)}{g \cos \theta} Hg \sin \theta \partial_X \theta \\
&\quad + \frac{\Upsilon \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right)}{g \cos \theta} \tan \theta \partial_X \theta \\
&= -\varphi(H, X) Hg \sin \theta \partial_X \theta + \psi(H, X) \tan \theta \partial_X \theta.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3. On peut réécrire le lemme précédent sous la forme

$$d\psi = -\psi \frac{d(\cos \theta)}{\cos \theta} + \varphi d(Hg \cos \theta).$$

En utilisant la deuxième partie du lemme, on peut réécrire la deuxième équation de (2.24) :

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t(\varphi u) + \partial_X(\varphi u^2 + \psi) + \varphi g \partial_X b + \psi \frac{\partial_X \cos \theta}{\cos \theta} \\
&= \partial_t \varphi u + \varphi \partial_t u + \partial_X(\varphi u)u + \varphi u \partial_X u + \partial_X \psi + \varphi g \partial_X b + \psi \frac{\partial_X \cos \theta}{\cos \theta} \\
&= \varphi \partial_t u + \varphi u \partial_X u - \varphi Hg \sin \theta \partial_X \theta + \varphi g b,
\end{aligned}$$

donc on a

$$\partial_t u + \partial_X \left(\frac{1}{2} u^2 + Hg \cos \theta + gb \right) = 0. \quad (2.26)$$

Proposition 2.4. Le système (2.24) a des propriétés suivantes

1. Il admet une inégalité d'entropie de la forme

$$\partial_t \left(\varphi \left(\frac{1}{2} u^2 + Hg \cos \theta + gb \right) - \psi \right) + \partial_X \left(\varphi u \left(\frac{1}{2} u^2 + Hg \cos \theta + gb \right) \right) \leq 0. \quad (2.27)$$

2. il préserve l'état stationnaire du lac au repos

$$u = 0, \quad H \cos \theta + b = \text{Constante};$$

3. avec une pente constante ($\partial_X \theta = 0$), il donne une solution exacte au système d'Euler à surface libre avec hypothèse hydrostatique (2.21).

Preuve: Si on multiplie la première équation de (2.24) par $\frac{1}{2}u^2 + Hg \cos \theta + gb$ et l'équation (2.26) par φu et on somme ces deux équations, en suivant le même calcul que dans la proposition 2.1 (et en utilisant le lemme précédent), on va obtenir le première point.

Le (2) est encore une fois trivial.

Pour la troisième partie on va chercher une solution de (2.21) de la forme $U(t, X, Z) = u(t, X)$. Comme θ est constant, on a $J = 1$ et les termes supplémentaires à droite s'annulent. En suivant la définition de e , on a

$$\begin{aligned} \partial_Z \left(e(\varrho) + \frac{p(\varrho)}{\varrho} \right) &= e'(\varrho) \partial_Z \varrho + \frac{p'(\varrho) \partial_Z \varrho}{\varrho} - \frac{p(\varrho)}{\varrho^2} \partial_Z \varrho \\ &= \frac{p'(\varrho) \partial_Z \varrho}{\varrho} = \frac{\partial_Z P}{\varrho} = -g \cos \theta \end{aligned}$$

pour tout $0 < Z < H$, donc

$$\left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho) = (H - Z)g \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1), \quad (2.28)$$

$$\varrho = \left(e + \frac{p}{\varrho} \right)^{-1} \left((H - Z)g \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right). \quad (2.29)$$

Maintenant on peut exprimer W à partir de la première équation de (2.21). De plus on a

$$\begin{aligned} \int_0^H \varrho(t, X, Z) dZ &= \int_0^H \left(e + \frac{p}{\varrho} \right)^{-1} \left((H - Z)g \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) dZ \\ &= \int_{\left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1)}^{Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1)} \left(e + \frac{p}{\varrho} \right)^{-1} (r) \frac{1}{g \cos \theta} dr \\ &= \varphi(H, X). \end{aligned}$$

Donc si on intègre la première équation de (2.21) par rapport à Z , on obtient exactement la première équation de (2.24) car $W(t, X, Z = 0) = W(t, X, Z = H) = 0$.

Finalement, en posant $P = p(\varrho)$ on a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \partial_X P &= \frac{p'(\varrho)}{\varrho} \partial_X \varrho = \frac{-g \cos \theta}{\partial_Z \varrho} \partial_X \varrho \\ &= -g \cos \theta \frac{\partial_X \varrho}{\partial_Z \varrho} = -g \cos \theta \frac{\partial_X \left((H - Z)g \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right)}{\partial_Z \left((H - Z)g \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right)} \\ &= \partial_X (Hg \cos \theta) - Zg \partial_X (\cos \theta) = \partial_X (Hg \cos \theta); \end{aligned}$$

alors car $\partial_Z u = 0$, la deuxième équation de (2.21) implique (2.26). \square

Proposition 2.5. *Les valeurs propres du système (2.24) sont entre les valeurs propres du modèle de Savage–Hutter corrigé (2.8),*

$$u - \sqrt{Hg \cos \theta} \leq u - \sqrt{\partial_\varphi \psi} \leq u + \sqrt{\partial_\varphi \psi} \leq u + \sqrt{Hg \cos \theta}. \quad (2.30)$$

Preuve: Tous les deux systèmes sont de type Saint Venant, alors on sait que les valeurs propres sont $u \pm \sqrt{\partial_\varphi \psi}$ et $u \pm \sqrt{Hg \cos \theta}$ respectivement [1].

On pose $F(H, X) = \partial_\varphi \psi - Hg \cos \theta$ et on veut montrer que $F(H, X) \leq 0$. On sait que $\partial_H \psi(H, X) = \varphi(H, X)g \cos \theta$, donc

$$\begin{aligned} \partial_H F &= \partial_H (\partial_\varphi \psi) - g \cos \theta = \frac{\partial_H (\partial_H \psi) \cdot \partial_H \varphi - \partial_H \psi \cdot \partial_H (\partial_H \varphi)}{(\partial_H \varphi)^2} - g \cos \theta \\ &= \frac{\partial_H \varphi g \cos \theta \cdot \partial_H \varphi}{(\partial_H \varphi)^2} - \frac{\partial_H \psi \cdot \partial_H (\partial_H \varphi)}{(\partial_H \varphi)^2} - g \cos \theta = -\frac{\partial_H \psi \cdot \partial_H (\partial_H \varphi)}{(\partial_H \varphi)^2}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de φ (faisant le même calcul que celui avec ψ) on obtient

$$\begin{aligned} \partial_H \varphi &= \left(e + \frac{p}{\varrho} \right)^{-1} \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right), \\ \partial_H (\partial_H \varphi) &= \left(\left(e + \frac{p}{\varrho} \right)^{-1} \right)' \left(Hg \cos \theta + \left(e + \frac{p}{\varrho} \right) (\varrho_1) \right) g \cos \theta. \end{aligned}$$

Alors on voit que φ , $\partial_H \varphi$ et $\partial_H (\partial_H \varphi)$ sont positives, ce qui implique que F est une fonction décroissante de H . Donc $F(H, X) \leq F(0, X) = 0$. \square

CHAPITRE 3

MODÈLE COMPRESSIBLE AVEC VISCOSITÉ

Dans ce chapitre on tente d'améliorer les modèles précédents en considérant le cas compressible et visqueux, qui représente une situation physique assez générale. Le point de départ est le système hydrostatique (2.21). Un guide est l'article de Fabien Marche [8] qui traite le cas visqueux incompressible.

Le but est double. D'une part on veut inclure la viscosité dans les équations d'une manière raisonnable. La viscosité apparaît naturellement dans les milieux qui nous intéressent, elle apporte une meilleure connaissance sur le mouvement des fluides inhomogènes et elle représente des phénomènes fondamentaux mais très complexes dans l'environnement. Nous renvoyons à l'annexe A pour un contexte général.

Nous allons encore considérer la condition à la surface libre $P = P_1 = \text{const}$, qui est une condition pas trop irréaliste.

Remarque 3.1. *La condition sur les contraintes à la surface libre peut s'écrire dans un cas simplifié $\sigma \vec{N} = 0$ à la surface libre, où σ est le tenseur des contraintes (un terme matriciel qui sera précisé plus bas) et \vec{N} est le vecteur normale extérieur à la surface libre. On pourrait remplacer le 0 à droite par un terme de tension de surface de la forme $\lambda \kappa \vec{N}$, où λ est un coefficient et κ dénote la courbure moyenne de la surface libre. Notre choix correspond à la condition $\sigma \vec{N} = -P_1 \vec{N}$.*

De façon générale pour les fluides visqueux compressibles newtoniens, la viscosité se formule sur le tenseur des contraintes σ sous la forme suivante,

$$\sigma = -p(\varrho) \text{Id} + 2\mu Du + \lambda(\text{div } u) \text{Id},$$

où $Du = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^\top)$ est le tenseur des déformations, μ est le coefficient de viscosité de cisaillement et λ est le coefficient de viscosité moyenne. Notre choix simplificateur est $\mu = 0$, ce qui donne un tenseur σ diagonal

$$\sigma = (-p(\varrho) + \lambda \text{div } u) \text{Id}. \tag{3.1}$$

Avec la notation $\sigma = -P \text{Id}$ cela revient à

$$P = p(\varrho) - \lambda \text{div } u, \quad (3.2)$$

et la condition $\sigma \vec{N} = -P_1 \vec{N}$ à la surface libre revient à $P = P_1$. Pour avoir un système dissipatif on doit supposer $\lambda \geq 0$. De plus, dans les parties qui suivent on va distinguer deux cas sur la base de l'ordre de grandeur de λ .

Une hypothèse supplémentaire que nous avons déjà vue plusieurs fois dans le chapitre précédent est une pente constante ($\partial_X \theta = 0$), qui implique que $J = 1$ est constant aussi. Donc nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_X(\varrho U) + \partial_Z(\varrho W) &= 0, \\ \partial_t U + U \partial_X U + W \partial_Z U + \frac{1}{\varrho} \partial_X P &= -g \sin \theta, \\ \frac{1}{\varrho} \partial_Z P &= -g \cos \theta, \\ P &= p(\varrho) - \lambda (\partial_X U + \partial_Z W). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ici, θ et λ sont supposés connus et constants, donc nous avons 4 inconnues : ϱ , U , W , P , et 4 équations (sans compter l'épaisseur $H(t, X)$ de la couche, qui évolue par la condition cinématique). Les conditions aux limites sont (2.22), et on écrit encore $P_1 = p(\varrho_1)$.

3.1 Cas d'un coefficient de viscosité petit

Quand nous avons pour la première fois considéré l'hypothèse hydrostatique, nous avons introduit le petit paramètre ε qui caractérisait le rapport hauteur sur longueur H/L . Cette hypothèse nous dit que $W = O(\varepsilon)$, qui nous garantit qu'on a la forme simplifiée hydrostatique de la troisième équation dans (3.3). Dans ce qui suit suppose que le coefficient de la viscosité moyenne λ est aussi petit, $\lambda = O(\varepsilon)$.

En utilisant la quatrième équation de (3.3) on obtient

$$\partial_Z P = \partial_Z (p(\varrho) - \lambda (\partial_X U + \partial_Z W)) = p'(\varrho) \partial_Z \varrho - \lambda \partial_Z (\partial_X U + \partial_Z W).$$

Alors avec la troisième équation on a

$$\frac{p'(\varrho)}{\varrho} \partial_Z \varrho - \frac{\lambda}{\varrho} \partial_Z (\partial_X U + \partial_Z W) = -g \cos \theta, \quad (3.4)$$

on en déduit que $\partial_Z \varrho = O(1)$ au moins, qui implique que $\varrho = \varrho_1 + O(\varepsilon)$. Ensuite on

utilise la première équation de (3.3), qui donne

$$\varrho_1(\partial_X U + \partial_Z W) = -(\partial_t \varrho + U \partial_X \varrho + W \partial_Z \varrho) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon),$$

donc on conclut que

$$\operatorname{div} u = \partial_X U + \partial_Z W = O(\varepsilon). \quad (3.5)$$

Maintenant, revenant à la quatrième équation de (3.3) qui définit P , on trouve que le terme $\lambda \operatorname{div} u$ est de l'ordre $O(\varepsilon^2)$, il est donc d'ordre négligeable pour la valeur de P . Ainsi nous obtenons que lorsque la viscosité est petite on peut négliger le terme de viscosité moyenne. Nous obtenons donc le même modèle que dans la partie 2.2.

3.2 Cas d'un coefficient de viscosité non petit

Nous avons vu qu'avec λ assez petit on obtient les mêmes formules que dans le cas sans viscosité. Ici nous considérons le cas où on suppose seulement que λ est borné, $\lambda = O(1)$.

Comme la quatrième équation de (3.3) définit P , on peut remplacer les deux dernières équations du système par l'équation (3.4). Comme la deuxième équation de (3.3) dépend simplement de W et de ϱ , le programme serait de résoudre ϱ et W en fonction de U , par le système

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + U \partial_X \varrho + W \partial_Z \varrho + \varrho(\partial_X U + \partial_Z W) &= 0, \\ \frac{p'(\varrho)}{\varrho} \partial_Z \varrho - \frac{\lambda}{\varrho} \partial_Z (\partial_X U + \partial_Z W) &= -g \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ensuite, on peut utiliser la deuxième équation de (3.3) pour trouver U . De plus, on voit que la dépendance de U par rapport à Z est fortement reliée à la dépendance de $\frac{1}{\varrho} \partial_X P$ par rapport à Z .

Si on écrit la première équation de (3.6) comme

$$\partial_Z W + \frac{\partial_Z \varrho}{\varrho} W = -\partial_X U - \frac{\partial_t \varrho}{\varrho} - \frac{\partial_X \varrho}{\varrho} U, \quad (3.7)$$

on observe que c'est une équation différentielle linéaire en W en la variable Z . Utilisant la condition au fond on peut donc exprimer W en fonction de ϱ et U ,

$$W(Z) = -\frac{1}{\varrho} \int_0^Z (\rho \partial_X U + \partial_t \varrho + U \partial_X \varrho) dZ'. \quad (3.8)$$

Utilisant cette expression de W dans la deuxième ligne de (3.6), nous trouvons une équation pour ρ .

Nous n'avons pas trouvé de moyen de résoudre cette équation et d'en déduire une dépendance en Z pour U .

3.3 Termes de viscosité de cisaillement

Dans les deux dernières parties, on a considéré seulement une viscosité moyenne (on a posé $\mu = 0$), car cela nous permet d'appliquer à peu près les mêmes calculs que dans le cas sans viscosité.

Mais pour un modèle général il est nécessaire de prendre en compte les termes non-diagonaux de σ , c'est à dire le cisaillement. Cela induit plusieurs coefficients de contraintes au lieu d'une seule pression, et cela complique les équations de quantité de mouvement.

ANNEXES

ANNEXE A

DÉRIVATION DES ÉQUATIONS

Le but de ce chapitre supplémentaire est de fournir une dérivation brève mais considérablement formelle des équations d'Euler compressibles de la forme (2.1). On va commencer dans un milieu entièrement physique et on va simplifier les règles génériques avec les hypothèses un peu restrictives sur le fluide pour arriver aux équations de Navier–Stokes incompressibles, qu'on peut réduire aux équations d'Euler.

Dans la description eulérienne, on peut associer à chaque point matière x dans \mathbb{R}^3 (ou dans le domaine du fluide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) et à chaque temps $t \in \mathbb{R}$ les quantités physiques suivantes :

- le champ de la vitesse $\vec{v} = \vec{v}(t, x) \in \mathbb{R}^3$,
- la densité de matière $\varrho = \varrho(t, x) \in \mathbb{R}_+$,
- l'énergie interne $e = e(t, x) \in \mathbb{R}$,
- l'entropie $s = s(t, x) \in \mathbb{R}$,
- la pression $p = p(t, x) \in \mathbb{R}$.

Il y a des nombreux quantités pertinentes, par exemple le moment ($\varrho \vec{v}$) ou la température ($T = T(t, x)$), on a énuméré ici les plus importantes pour la fondation des équations.

Le système caractérisant le mouvement du fluide vient de plusieurs lois de conservation de mécanique et celles de thermodynamique. Pour être capable de les manipuler mathématiquement, on va introduir la notion de flot du champ de vitesse \vec{v} , car l'interprétation mathématique des lois de conservation est basée sur le fait que certaines quantités physiques ne changent pas le long des trajectoires des particules.

Définition A.1. *Le flot ψ de \vec{v} est la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante*

$$\frac{d}{dt}\psi(t, x) = \vec{v}(t, \psi(t, x)), \quad \psi(0, x) = x$$

(le point x est un paramètre ici).

Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on va noter $\Omega_t = \psi_t(\Omega)$, où $\psi_t(x) = \psi(t, x)$. Le lemme ci-dessous sera une méthode utile dans la réécriture des lois de conservation.

Lemme A.1. Soient Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^3 , ψ le flot de \vec{v} avec $\Omega_t = \psi_t(\Omega)$. Soit b une fonction scalaire. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(t, x) dx &= \int_{\Omega_t} \left(\partial_t b(t, x) + \operatorname{div} (b(t, x) \vec{v}(t, x)) \right) dx \\ &= \int_{\Omega_t} \partial_t b(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_t} (b(t, x) \vec{v}(t, x) \cdot \vec{N}) d\Sigma. \end{aligned}$$

(Ici, \vec{N} est le vecteur normal extérieur au bord.)

Maintenant nous pouvons décrire les quantités physiques qui seront préservées durant le mouvement du fluide. Soit Ω un domaine ouvert quelconque de \mathbb{R}^3 .

Conservation de la masse : on travaille avec "un fluide isolé", c'est-à-dire il n'y a aucune production ou perte de masse à l'intérieur du fluide pendant le temps d'évolution. La masse du fluide dans Ω au temps t est

$$M_\Omega(t) = \int_{\Omega} \varrho(t, x) dx.$$

Comme la masse est conservé on peut déduire que

$$\frac{d}{dt} M_{\Omega_t}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho(t, x) = 0.$$

Donc en appliquant le lemme A.1 on obtient l'équation qui décrit **l'équilibre de la masse** :

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} (\varrho \vec{v}) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Conservation du moment : La deuxième loi de Newton indique que toutes les forces agissant sur la partie du fluide dans Ω sont égaux à la force résultant du changement du moment. Le moment peut s'écrire dans la forme intégrale suivante

$$\vec{P}_\Omega(t) = \int_{\Omega} (\varrho \vec{v})(t, x) dx.$$

Donc la force extérieure $\vec{\phi}$ (par exemple la gravité) et les forces surfaciques au bord du domaine sont égaux au changement du moment. Et on peut représenter les forces surfaciques avec un tenseur des contraintes d'ordre 2 σ (une matrice) qu'on va préciser plus tard avec les hypothèses physiques supplémentaires. Donc on obtient

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{\Omega_t}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (\varrho \vec{v})(t, x) dx = \int_{\Omega_t} (\varrho \vec{\phi})(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_t} (\sigma \cdot \vec{N})(t, x) d\Sigma,$$

et avec le lemme on a l'équation décrivant **l'équilibre du moment** :

$$\partial_t(\rho\vec{v}) + \operatorname{div}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v}) = \rho\vec{\phi} + \operatorname{div} \sigma. \quad (\text{A.2})$$

Conservation de l'énergie : comme une conséquence de la première loi de la thermodynamique, on a que l'énergie totale, exprimée par

$$E_\Omega(t) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 + \rho e \right) (t, x) dx$$

est aussi conservée, donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\Omega_t}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(t, x) \left(e + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) (t, x) dx \\ &= \int_{\Omega_t} (\rho\vec{\phi} \cdot \vec{v})(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_t} ((\sigma \cdot \vec{N}) \cdot \vec{v})(t, x) d\Sigma - \int_{\partial\Omega_t} (\vec{q} \cdot \vec{v})(t, x) d\Sigma, \end{aligned}$$

où les deux premières intégrales à droite correspondent à l'énergie qui vient des forces agissants et la troisième représente la perte de la chaleur au bord, avec \vec{q} soit le flux de dissipation d'énergie. En appliquant le lemme, on obtient

$$\partial_t \left(\rho \left(e + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho \left(e + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \vec{v} \right) = \rho\vec{\phi} \cdot \vec{v} + \operatorname{div}(\sigma \cdot \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q}.$$

Néanmoins, si on multiplie (A.2) par \vec{v} et si on introduit l'énergie cinétique par unité volumique $E_k = \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2$, on peut appliquer la règle de Leibnitz pour arriver à

$$\partial_t E_k + \operatorname{div}(E_k \vec{v}) = \rho\vec{\phi} \cdot \vec{v} + (\operatorname{div} \sigma) \cdot \vec{v}.$$

Finalement, si on soustrait les deux dernières équations l'un de l'autre, on obtient l'équation simplifié qui décrit **l'équilibre de l'énergie** :

$$\partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}(\sigma \cdot \vec{v}) - (\operatorname{div} \sigma) \cdot \vec{v} - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (\text{A.3})$$

L'entropie : la deuxième loi de la thermodynamique indique que l'entropie ne peut qu'augmenter, alors si on écrit l'entropie dans sa forme intégrale sur Ω ,

$$S_\Omega(t) = \int_\Omega (\rho s)(t, x) dx$$

on va arriver à l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt} S_{\Omega_t} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (\rho s)(t, x) dx \geq - \int_{\Omega_t} \left(\frac{\vec{q} \cdot \vec{N}}{T} \right) d\Sigma.$$

Donc on a une forme explicite pour **l'inégalité d'entropie** :

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \vec{v}) \geq -\operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right). \quad (\text{A.4})$$

Jusqu'à maintenant on n'a fait presque aucune hypothèse physique sur le fluide, les équations (A.1), (A.2), (A.3) et (A.4) sont valables pour les fluides génériques. Dans ce qui suit on va supposer que *le fluide est newtonien*, ce qui implique les conditions suivantes :

- le fluide est isotrope, les inconnues ne dépendent que de t et de x ;
- le tenseur des contraintes σ dépend linéairement de la matrice jacobienne $D\vec{v}$, et il est invariant par des transformations rigides ;
- le moment angulaire est conservé, on en déduit que σ peut s'écrire comme :

$$\sigma = \tau - p \operatorname{Id} \text{ avec } \tau = \lambda(\operatorname{div} \vec{v}) \operatorname{Id} + 2\mu D(\vec{v}),$$

où $\tau = \tau(t, x)$ est appelé le tenseur des contraintes visqueuses, les nombres réels λ et μ sont les coefficients de viscosité et $D(\vec{v}) = \frac{1}{2}(D\vec{v} + {}^t D\vec{v})$ est le tenseur des déformations.

Avec la relation de Gibbs–Duheim

$$T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

on peut obtenir que

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \vec{v}) = \frac{\tau : D(\vec{v})}{T} - \operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - \frac{\nabla T \cdot \vec{q}}{T^2},$$

où ":" signifie le produit de Frobenius (produit scalaire composante par composante).

En utilisant cette équation avec l'inégalité d'entropie (A.4) on a une forme simplifiée :

$$\tau : D(\vec{v}) - \frac{\nabla T \cdot \vec{q}}{T} \geq 0.$$

Par définition de τ et avec la loi de Fourier $\vec{q} = -k\nabla T$ (avec k le coefficient de conductivité thermique) on obtient que l'inégalité d'entropie est satisfait si et seulement si

$$\lambda(\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu \operatorname{Tr}(D(\vec{v}))^2 + k \frac{|\nabla T|^2}{T} \geq 0,$$

par conséquent on a des conditions suivantes sur les coefficients :

$$k \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \text{et} \quad 2\mu + 3\lambda \geq 0. \quad (\text{A.5})$$

Donc on peut bien conclure que l'entropie ne joue pas un rôle importante dans la description du mouvement (toutefois on doit remarquer qu'on a traité un fluide newtonien).

Un ajustement final sera les deux équations d'état qui mettent en corrélation les inconnues p , ϱ , e et T . Ces équations peuvent s'écrire comme ci-après sous l'hypothèse d'avoir des propriétés d'un gaz parfait :

$$e = C_v T \quad \text{et} \quad p = R \varrho T, \quad (\text{A.6})$$

où C_V et R sont des constantes positives connues. En introduisant la constante adiabatique $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ où $C_p = C_v + R$ est aussi une constante, on peut déduire que $p = (\gamma - 1)\varrho e$. Donc l'équation qui décrit l'équilibre de l'énergie a une nouvelle forme :

$$\partial_t p + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \vec{v} - (\gamma - 1) \operatorname{div}(k \nabla T) = (\gamma - 1) \left(\varrho \vec{\phi} + 2\mu D(\vec{v}) : D(\vec{v}) + \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 \right). \quad (\text{A.7})$$

Avec l'hypothèse supplémentaire que p ne dépend que de la densité ϱ , et que λ et μ ne dépendent ni de T ni de ϱ , on peut observer que cette équation modifiée devient découplée des équations de la masse et du moment (A.1) et (A.2). Donc, car l'équation d'énergie définit p , si ϱ et \vec{v} sont déjà connues ; seulement les équations de la masse et du moment nous restent à résoudre :

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) &= 0 \\ \partial_t(\varrho \vec{v}) + \operatorname{div}(\varrho \vec{v} \otimes \vec{v}) - \mu \Delta \vec{v} - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \vec{v}) + \nabla p &= \vec{\phi} \varrho. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Si on néglige les termes venant de la viscosité, on obtient exactement les équations (2.1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] François Bouchut. *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws : And Well-Balanced Schemes for Sources*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [2] François Bouchut, Anne Mangeney-Castelnau, Benoit Perthame, and Jean-Pierre Vilotte. A new model of Saint-Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow water flows. *Comptes rendus mathématique*, 336(6) :531–536, 2003.
- [3] François Bouchut and Michael et autres Westdickenberg. Gravity driven shallow water models for arbitrary topography. *Communications in Mathematical Sciences*, 2(3) :359–389, 2004.
- [4] Raphaël Charve, Frédéric et Danchin. Fourier analysis methods for models of nonhomogeneous fluids. *notes du cours*, 2015.
- [5] Tomás Morales De Luna. A Saint-Venant model for gravity driven shallow water flows with variable density and compressibility effects. *Mathematical and Computer Modelling*, 47(3) :436–444, 2008.
- [6] AJC Barré de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leurs lits. *Comptes Rendus des séances de l’Académie des Sciences*, 73 :237–240, 1871.
- [7] Kolumban Hutter, Yongqi Wang, and Shiva P Pudasaini. The savage–hutter avalanche model : how far can it be pushed? *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 363(1832) :1507–1528, 2005.
- [8] Fabien Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 26(1) :49–63, 2007.

- [9] Pierre-Arnaud Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118. Springer Science & Business Media, 1996.
- [10] Stuart B. Savage and Kolumban Hutter. The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. part i : Analysis. *Acta Mechanica*, 86(1-4) :201–223, 1991.
- [11] Yongqi Wang, Kolumban Hutter, and Shiva P Pudasaini. The Savage-Hutter theory : A system of partial differential equations for avalanche flows of snow, debris, and mud. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 84(8) :507–527, 2004.